АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

ПРОБЛЕМЫ ЛОГИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва — 1963

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
доктор философских наук П. В. ТАВАНЕЦ

С. А. Яновская

О ФИЛОСОФСКИХ ВОПРОСАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1. Философские вопросы есть, конечно, во всякой науке. Однако известно, что специалисты разных областей знания старательно избегают вопросов этого рода. «Для того, чтобы заниматься математикой, мне совсем не требуется знать, что такое *математика*, — говорит иногда такой специалист-математик, — ведь этот термин не фигурирует ни в каких математических теоремах или определениях, и мне им не приходится пользоваться».

Философские взгляды ученого поэтому нередко содержатся в его работах лишь неявно. Но и в кругах философов часто заметно желание отгородиться от необходимости более специально ознакомиться с конкретными вопросами другой науки, представить дело так, будто специальные вопросы других областей знания никак не могут интересовать философов.

Занимаясь логикой, нельзя, однако, избежать философских вопросов: неслучайно виднейшие специалисты в области современной, т. е. математической логики вербуются как из числа математиков, так и из числа философов.

Каковы философские вопросы математической логики? В этой краткой заметке я не собираюсь давать сколько-нибудь полный обзор философской проблематики, относящейся к математической логике. Не берусь и выделять какие-нибудь из вопросов этого рода как особенно важные или интересные. Я просто хочу показать, что такая проблематика существует и что нельзя заниматься математической логикой, не обращаясь к ней. Нашим философам поэтому нельзя уклониться от необходимости готовить кадры таких специалистов, которые могут квалифицированно, т. е. на основе специальной работы над вопросами математической логики, разобраться в этой проблематике с точки зрения диалектического материализма.

2. Философские вопросы математической логики относятся, прежде всего, к кругу задач, связанных с предметом и методом этой науки. Как известно, точность математики объясняют тем, что математические доказательства носят строго логический характер. С другой стороны, задача математической логики состоит как раз в том, чтобы сделать логику точной наукой, применяя к ней методы математики. Нет ли тут круга? Вопрос о соотношении математики и логики представляет вообще философскую проблему, вокруг которой ведутся горячие споры как между представителями различных идеалистических направлений в области философских вопросов математики (логицизма, интуиционизма, формализма, конвенционализма и др.), так и, прежде всего, между материализмом и идеализмом.

Трудность здесь — как всегда при возникновении такого рода «кругов» — разрешается при помощи критерия практики. Суть дела можно коротко изложить так: в своей практической деятельности люди научаются подмечать аналогичное, повторяющееся в самых различных явлениях, вещах и поступках, чтобы сознательно повторять некоторые операции в целях достижения нужного им результата. Именно эта миллиарды раз повторяющаяся практика оперирования с некоторыми объектами и соответствующими им (их свойствам и отношениям) понятиями научает людей делать логические умозаключения, достаточные для нужд исторически возникающих областей науки, в том числе и математики. Дальнейшее развитие последних бывает, однако, связано с такими трудностями, для преодоления которых приходится возвращаться к началам науки, к самым ее основаниям. Так были созданы, например, неэвклидовы геометрии. Возвращение происходит, однако, не на пустом месте: при этом используется все богатство уже достигнутой ступени в развитии науки, но используется критически — со строгим анализом тех средств, понятий и методов, посредством которых оно было приобретено.

Именно так обстоит дело и в отношении логических средств, используемых в математике. При помощи средств логики, еще не очень глубоко проанализированных, были созданы научные методы математики, оказавшиеся на практике (в том числе и в применении к теоретическим проблемам само́й математики) весьма плодотворными. Дальнейшее развитие математики потребовало, однако, уточнения (и усиления) средств логики.

Так, если математику удалось решить какую-нибудь задачу или доказать теорему, то для проверки правильности этого решения или доказательства обычно не требуется уточнения того, что́ значит «решить задачу» или «доказать теорему». Но если какое-нибудь предложение — вроде континуумгипотезы в теории множеств или утверждения о непротиворечивости арифметики — упорно не удается ни доказать, ни опровергнуть, или какая-нибудь задача — вроде ставшей знаменитой еще в древности задачи о квадратуре круга, неразрешимость которой была окончательно установлена лишь в 80-х годах прошлого века[1], — упорно не поддается усилиям математиков, то возникает вопрос, разрешима ли вообще эта задача, можно ли вообще доказать или опровергнуть это предложение. Чтобы ответить на эти вопросы с такой же строгостью и точностью, с какой доказываются математические теоремы, приходится задумываться над тем, что́ значит «решить задачу» (вообще или специально данную), что́ значит «доказать теорему», как уточнить эти понятия так, чтобы на интересующие нас вопросы получить однозначный ответ «да» или «нет». И при том получить его так, чтобы правильность этого ответа можно было материально проверить; так проверить, как проверяется всегда правильность выполнения математических операций, о которых Энгельс писал, что они допускают «материальное доказательство, проверку, — так как они основаны на непосредственном материальном созерцании, хотя и абстрактном», чем и объясняется «положительная достоверность, присущая математическим действиям» [1, стр. 631].

Приходится, следовательно, пользуясь уже разработанными средствами математики, уточнять понятия и методы логики, чтобы при их помощи решать более трудные задачи математики и логики, и так идти вперед все далее и далее, совершенствуя математику средствами

[1] В 1882 г. Линдеман доказал трансцендентность числа π, откуда и следовала невозможность построения циркулем и линейкой квадрата, равновеликого кругу.

логики и логику средствами математики (в которой логика играет столь большую роль).

3. В настоящее время почти нет ни одного понятия (и термина) логики, анализ и уточнение которого не оказались бы необходимыми для того, чтобы справиться с возникающими в математике или логике трудностями, опираясь на достигаемую при помощи такого уточнения возможность сделать некоторые утверждения строго математически проверяемыми.

Таковы, прежде всего, утверждения о существовании тех или иных абстрактных объектов математики, вокруг истолкования которых идут еще более оживленные дискуссии между представителями различных направлений в области философских вопросов математики и логики, чем вокруг более общего вопроса о соотношении математики и логики. В частности, здесь возродились на новой основе старые, относящиеся еще к временам средневековой схоластики споры о природе универсалий, ведущиеся между современными реалистами (А. Чёрч, К. Гёдель) и номиналистами (В. Куайн, Н. Гудмен). Материалистическое решение вопроса о конструктивном истолковании математических суждений, в формулировку которых входит квантор существования (в том числе и после квантора общности, т. е. в виде: «для всякого X существует Y такое, что...»), с исчерпывающей полнотою проведено в трудах Н. А. Шанина [2].

Особые трудности в математике и математической логике связаны с так называемыми чистыми доказательствами существования, правомерность которых отрицается конструктивными направлениями в математике и математической логике (в том числе и очень успешно развивающейся советской школой А. А. Маркова и его учеников — Н. А. Шанина, И. Д. Заславского, Г. С. Цейтина и др.).

Не отрицая правомерности сомнений в допустимости чистых (т. е. не содержащих указаний на способы построения или вычисления) доказательств существования абстрактных объектов математики и логики (заведомо не существующих как таковые в окружающем нас мире), Д. Гильберт, его ученики и последователи направили свои усилия на то, чтобы оправдать лежащее в основе «чистых» доказательств существования применение закона исключенного третьего к утверждениям о бесконечных множествах или, что́ сводится к тому же, применение абстракции актуальной бесконечности, доказав, что такое применение никогда не приведет к нелепости, например к выводу, что $1 = 0$. Как известно, эти попытки Гильберта раз навсегда обосновать математику, доказав ее непротиворечивость, не увенчались успехом. Больше того, после известных теорем Гёделя о неполноте формализованной арифметики и недоказуемости непротиворечивости формальной системы средствами, которые не выходят за пределы этой же системы[2], попытки эти были оставлены вообще как бесперспективные. Однако «классическая» (т. е. свободно пользующаяся абстракцией актуальной бесконечности) теория множеств играет настолько большую и плодотворную роль в современной математике (в которой она, кстати, практически никогда не приводит к противоречиям), что большинство математиков и математических логиков в своих работах пользуются ею. Предпринимаемые чаще всего представителями математической логики попытки оправдать правомерность такого поведения состоят в создании аксиоматических теорий множеств, где известные противоречия (антиномии), обнаруженные в этой науке, заведомо не возникают.

Прежде чем мы перейдем к этому кругу вопросов, заметим еще, что советская школа математических логиков, допускающих абстракцию актуальной бесконечности, возглавляется П. С. Новиковым, учениками которого являются С. И. Адян, А. А. Мучник, Б. А. Трахтенброт и многие другие (в известной мере также В. А. Успенский и А. В. Кузнецов), и что разногласия между школами А. А. Маркова и П. С. Новикова относятся не к исходным принципам диалектического материализма, а к специальному вопросу о том, какими именно абстракциями (и как?) можно пользоваться в математике и логике.

С точки зрения автора, конструктивные направления в математике и логике имеют не меньшее значение для развития этих наук, чем создание неэвклидовых геометрий для развития геометрии. В свете конструктивного подхода к понятиям и методам математики и логики в них обнаруживаются такие черты, которые иначе оставались бы неразличимыми. В применении же к какому-нибудь данному кругу задач вопрос о допусти-

---

2 Т. е. средствами, формализуемыми в этой же системе.

мости тех или иных видов абстракции (и идеализации) должен решаться конкретно: путем установления способов, позволяющих не только вводить те или иные абстрактные объекты (вообще абстрагироваться от чего-либо), но и исключать (реализовать, восполнять) введенные для построения теории абстрактные предметы, их («идеализированные») свойства и отношения, без чего применение теории на практике попросту невозможно (еще Гегель, как известно, зло смеялся над теми, кто хотел есть именно плод как таковой, а не какие-нибудь конкретные вишни, яблоки, груши)[3].

4. Круг философских проблем математической логики, относящийся к аксиоматике формальных систем и исчислений, имеет значение не только в связи с обоснованием теории множеств. Если возможны различные логические исчисления (классическая и конструктивная логики, которые в свою очередь могут строиться по-разному, различные исчисления строгой и сильной импликации, многозначные и модальные логики, комбинаторная логика Шейнфинкеля-Карри, исчисления λ-конверсии Чёрча и многие др.), то естественно возникает вопрос о том, как выбираются системы аксиом для этих исчислений.

Представители неопозитивизма на этот вопрос обычно дают ответ в духе конвенционализма: каждый человек волен выбирать для себя свою логику (ее аксиомы и правила вывода), вопроса об оправданности такого выбора не существует («принцип терпимости» Р. Карнапа, особенно в его старых формулировках, относящихся к тому периоду творчества этого ученого, когда он сводил математическую логику к вопросам синтаксиса некоторого языка и еще «не замечал» задач, связанных с проблемами истинности, смысла и значения, — задач семантики). В кругах других представителей математической логики такая установка не могла, однако, встретить сочувствия. Уже создатель первой теории математического доказательства Гильберт, пришедший к ней, по существу исходя из потребностей развитого им аксиоматического метода, писал, что намеченной им программой формализации математических доказательств был предрешен выбор

---

[3] Специально вопросам о способах введения и исключения абстрактных объектов и понятий был посвящен доклад автора на Международном коллоквиуме по методологии наук в Варшаве (сентябрь 1961 г.).

аксиом для его теории доказательства [3, стр. 360], что вообще «при выборе, трактовке и употреблении аксиом и правил мы не хотим зависеть только от доброй веры и слепого доверия» [3, стр. 363].

Наиболее крайнюю позицию в этом вопросе, состоящую в отказе вообще от аксиоматического построения логики, занимает немецкий математический логик П. Лоренцен. «С помощью подходящих аксиом, — пишет он, — можно, правда, все, что угодно, доказать, но ничего нельзя обосновать» [4, стр. 1]. Различие между «логиками» обусловливается не различием в выборе аксиом, а различием предмета. Предмет силлогистики Аристотеля отличен от предмета логики диспутов средневековых схоластов, от предмета оперативной логики Лоренцена, представляющей собой общую теорию любых исчислений, от предмета формальной логики как науки о формальном выводе одних форм высказываний из других. Свойствами предмета той или иной «логики» определяются некоторые общие принципы (законы), содержательно верные в применении к рассматриваемой в ней области объектов и позволяющие заменить все «аксиомы» определениями и доказательствами (причем «доказательство» понимается, конечно, не в смысле «вывода в некоторой аксиоматической теории») [5, стр. 28].

О том, что содержательный (диалектический) анализ аксиом Эвклида, служащих у него дополнением к определению величины, выявил бы их необходимость (мог бы служить их доказательством, обоснованием), еще задолго до Лоренцена писал Ф. Энгельс [1, стр. 572].

Вообще с точки зрения диалектического материализма «принципы не исходный пункт исследования, а его заключительный результат» [1, стр. 34]. «Практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, дабы эти фигуры могли получить значение аксиом», — писал В. И. Ленин [6, стр. 164].

Но после того, как аксиомы выявлены, дальнейшее развитие науки может происходить уже путем «оборачивания метода» (К. Маркс «Математические рукописи»), когда вторичное (аксиоматика) выступает как первичное, и новая система логики строится путем изменения, добавления или отбрасывания тех или иных аксиом, аналогично опять-таки тому, как это имело место при создании неэвклидовых геометрий, к первой из которых Н. И. Лобачевского привело, как известно, именно желание разобраться в основах геометрии: освободить геометрию Эвклида от произвольных допущений, от таких аксиом, выбор которых не является достаточно обоснованным. Создание различных логических систем, в том числе и строящихся аксиоматически, и выяснение связей между ними в действительности так же не дает оснований для «выводов» в духе конвенционализма, как и создание неэвклидовых геометрий.

5. К числу философских проблем, имеющих непосредственное отношение к выбору систем аксиом для аксиоматического построения теории множеств, т. е. для логического обоснования этой науки, принадлежат, прежде всего, вопросы, связанные с многочисленными попытками «решения» (или исключения) антиномий («парадоксов») логического или семантического характера. Природа этих антиномий по существу не отличается от природы тех противоречий, которые характерны для всякой формализации и для преодоления которых требуется дальнейшее развитие науки. Дело в том, что всякое познание связано с некоторым огрублением, отвлечением, очерствлением — будем говорить «уточнением» или «конструктивизацией» (в смысле придания им жесткой формы) — изучаемых объектов. Такое обрезывание расплывающихся границ помогает лучше выявить центральную часть изучаемого объекта: его сущность, на которой (в данной связи) необходимо сосредоточить внимание. Но если контекст меняется и существенным делается как раз изучение того, что находится на обрезанной ранее границе, то старое уточнение становится непригодным: ведет к противоречиям. Приходится вводить новое уточнение, опираясь, однако, на то, что было уже достигнуто на предыдущей ступени развивающегося, таким образом, по спирали процесса познания [6, стр. 248, 174, 330].

В применении к антиномиям математической логики этот процесс происходит обычно следующим образом:

А. Если предложение P из теории T оказывается таким, что P влечет не-P, ($P \supset \neg P$), а не-P влечет P, ($\neg P \supset P$), т. е. что в этой теории получается противоречие, то производится содержательный анализ *явно* или *хотя бы молча* подразумеваемых предпосылок, на которых строится теория T и которые — в связи с контекстом, в котором предложение P может представляться осмысленным, — возбуждают подозрения. Если такой предпосылкой оказывается X, а в теории T справедлива так называемая теорема дедукции, то вместо противоречия

$$((P \supset \neg P) \& (\neg P \supset P))$$

мы получаем

$$(X \supset ((P \supset \neg P) \& (\neg P \supset P))),$$

откуда следует, что посылка X не верна. Так, например, если такой предпосылкой X является допущение, что объекты, о которых идет речь в предложении P, достаточно жестко фиксированы, чтобы о них можно было рассуждать по правилу «A есть A», то таким образом получается заключение, что к рассматриваемым объектам закон тождества неприменим (на этом основан способ устранения антиномий, предложенный польским логиком Лесьневским). Аналогично, если в теории T всякое введение какого-нибудь нового объекта (новой постоянной) предполагает аксиому о существовании такого объекта, то антиномия превращается в доказательство несуществования этого объекта (и притом даже в том случае, когда новый объект вводится посредством определения его лишь через такие постоянные, которые являются логическими, как, например, связки $\&$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\neg$ и кванторы общности и существования, — способ Д. А. Бочвара). Так же обстоит дело в случаях, когда, следуя Дж. фон-Нейману, В. Куайну или К. Гёделю, возникновение антиномий рассматривается как ведущее к заключению, что некоторые классы сами не могут быть элементами каких-нибудь классов (и к соответствующему уточнению понятий множества, класса и др.).

На первый взгляд может показаться, что под эту схему не подходит случай, когда антиномия трактуется как свидетельствующая о том, что в логике нельзя ограничиться рассмотрением объектов только одного рода, например, считать все объекты одинаково «хорошими», но приходится вводить разные категории их, например различать «хорошие» и «плохие» объекты, осмысленные и бессмысленные (примерно на такой точке зрения стоит Х. Карри, отстаивающий в своей «Комбинаторной логике» [7, стр. 258—262] право на существование и для «плохих» объектов — «парадоксальных комбинаторов», но рассматривающий их наличие как доказательство необходимости вводить в логику некоторые условия, ограничивающие возможность построевия логических постоянных как комбинаторов). Однако в действительности и в этом случае антиномия возникает лишь после того, как мы наделяем наши «комбинаторы», например отрицание, определенным смыслом (и соответствующими свойствами), благодаря чему «парадоксальный комбинатор» обращается в бессмыслицу того же рода, которую мы рассматривали выше, а посылка X может рассматриваться как гласящая, что этот комбинатор осмыслен. Аналогично обстоит дело, когда из обнаружения противоречия делают более общие заключения о необходимости различать вообще предметы (или предикаты) разных ступеней и типов (теория типов Б. Рассела); различать разные отношения принадлежности элемента к классу (принцип конкретизации Д. А. Бочвара); или, наконец, вводить в логику время, относя высказывания P, $\neg P$, снова P к разным моментам времени (что исключает антиномию, превращая ее в некоторый аналог звонка).

Последний способ мне представляется особенно убедительным, поскольку он в наиболее явной форме связывает возникновение и разрешение противоречия с движением, происходящим во времени. Возможны, конечно, другие способы конкретного выбора посылки X, опровергаемой той или иной антиномией. Этой многозначности не приходится, однако, опасаться, поскольку, наоборот, она гарантирует возможность лучше приспособиться к условиям данного контекста. Однако осознанный анализ возможных предположений X, фактически действительно используемых при выводе данной антиномии, безусловно желателен (такой анализ выполнен, например, в «Логике для математиков» Б. Россера в применении к известному парадоксу Рассела).

Б. Само по себе выявление посылки X, которая подлежит устранению или модификации, не есть еще, конечно, разрешение антиномии. Оно ведет, как это, впрочем, уже было отмечено в ряде приведенных выше случаев, к необходимости построить новую теорию, в которой действительно не используется уже посылка X и производится соответствующее уточнение тех или иных понятий, аксиом и приемов теории T. Оно ведет, иными словами, к развитию теории, осуществляемому, однако, не на пустом месте, но подготовленному всем предшествующим развитием науки — путем, как говорят иногда в таких случаях в марксистской литературе, диалектического «снятия» прежней ступени развития теории. В этой связи следует особо отметить создание ряда логических и логико-математических систем, не пользующихся так называемыми непредикативными определениями, состоящими в том, что новый (абстрактный!) объект вводится через некоторое множество объектов, членом которого он является («порочный круг», подмеченный Г. Вейлем во многих определениях классического математического анализа). Такие системы строятся обычно (см., например, работы Лоренцена и Хао Вана по обоснованию математического анализа) в виде некоторой последовательности или даже упорядоченного по (конструктивным) трансфинитным числам множества «пухнущих» систем, в котором каждая следующая или предельная система «снимает» и в то же время включает в себя все, ей предшествующие.

6. С необходимостью логического анализа и уточнения, в свою очередь связанного с решением ряда методологических вопросов, математическая логика встретилась уже, по существу, в применении ко всем ее основным понятиям, таким, как предмет (особенно конструктивный), его имя, значение и смысл имени, переменная (содержательная и формальная переменная, свободная и связанная, неопределенная постоянная, переменные: предметная, пропозициональная, предикатная и др.); постоянная (особенно логические постоянные, такие, как связка «если..., то», оператор отрицания «не», оператор описания «тот..., который», оператор абстракции и др.); предикат и математическая функция (особенно вычислимая), алгоритм, множество и класс, вывод (формальный); логическое следствие, логическое доказательство, определение (особенно индуктивное), суждение, предложение, высказывание, утверждение, отрицание, противоречие (абсурд), аксиома, теорема, формальная система, исчисление, его непротиворечивость и полнота, синтаксис, семантика, интерпретация, модель, аналитическое и синтетическое суждения (приемлемо ли такое различение? имеет ли оно значение для логики?), возможность, необходимость и другие модальности, и многие другие понятия и относящиеся к ним термины.

7. О философском значении таких важнейших откр тий в математической логике, как теоремы Гёделя (о не полноте и непротиворечивости), Чёрча (о неразрешимост проблемы разрешения для формул исчисления предика тов), как точные определения алгоритма и вычислимо функции, мы здесь не будем говорить, поскольку о ни уже много написано в нашей литературе.

Мы отметим еще только, что дискуссии, ведущиес вокруг затронутых выше, равно как и других философ ских вопросов математической логики, неизменно свиде тельствуют о неудачах попыток обосновать эту науку исходя из идеалистических и метафизических концепций и, наоборот, о том, что важнейшие конкретные резуль таты, содержащиеся в трудах таких видных ученых как Д. Гильберт, Л. Брауэр, К. Гёдель, А. Чёрч Б. Рассел и другие, всегда оказываются основанными н таких идеях, которые являются — пусть даже вопреки желаниям авторов — диалектико-материалистическими п существу.

Можно было бы привести немало конкретных приме- ров этого рода. Некоторые из них, кстати, уже имеютс в нашей литературе (см., например, работы Б. В. Бирю- кова, посвященные анализу творчества Г. Фреге, или статьи в «Философской энциклопедии», относящиеся к раз- делу математической логики). Но анализ их требует детального обсуждения и должен быть поэтому отложен до какого-нибудь другого случая, когда автор, чувствую- щий себя в долгу перед читателем, сумеет — как он надеется — удовлетворить законные требования, которые к нему здесь могут быть предъявлены.

8. Большое число конкретных философских вопросов связано вообще с приложением математической логики к другим наукам и технике, особенно с кибернетическими приложениями. Я не гонорю уже о таких очень волную- щих аудиторию и отнюдь не лишенных практического интереса вопросах, как вопросы о том, может ли машина мыслить, что следует вообще понимать теперь под «ма- шиной», как определить человеческое сознание и мышле- ние, человеческий разум — и притом определить не столь словесно, «поэтично», как это сделано, например, в «Сло- варе философских понятий» Эйслера, где разум (Ver- nunft) «в наиболее общем смысле слова» определяется как «то же, что дух (Geist), интеллигентность, принцип мысли

в противоположность чувственности», а «дух», в соответствующем смысле этого слова, как «интеллект, сила мысли (разум), вся высшая духовная жизнь, самоосознанная, активно-целеустремленная деятельная душа, в противоположность чувственному, инстинктивному, ассоциативному, психике (der Psyche)»[4], а так, чтобы этими определениями можно было воспользоваться для решения конкретных вопросов о том, как строить машины, которые так же могут усилить возможности нашего разума, как телефон усиливает возможности нашего слуха или микроскоп и телескоп — возможности нашего зрения.

Очень существенное значение имеет решение вопросов о том, на каких принципах должна строиться логика, соответствующая потребностям теории конечных автоматов. Может ли ею оставаться обычная «классическая» логика с законом исключенного третьего и допущением абстракции актуальной бесконечности? Или тут следует пользоваться конструктивной логикой, основанной лишь на абстракции потенциальной осуществимости? Или, быть может, и это отвлечение «от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и во времени» [8, стр. 157], отвлечение, позволяющее нам рассуждать, например, о любых конечных последовательностях (о сколь угодно длинных «словах» вообще) как о практически осуществимых, является для такой теории слишком сильным допущением? Ведь фактически его можно истолковать как разрешение допускать, что наша жизнь может длиться сколь угодно долго и в нашем распоряжении может быть столько бумаги и чернил, сколько заведомо не уместится на земном шаре или даже во всей нашей галактике.

Может быть поэтому нужно строить логику, основанную на предложении академика А. Н. Колмогорова различать как обладающие существенно разными качествами три категории чисел: малые, средние и большие, трактуя проблемы, которые не могут быть решены без большого перебора, как остающиеся «за пределами возможностей машины на любой сколь угодно высокой ступени развития техники и культуры» [9, стр. 19]?

---

[4] Другие «смыслы» этих терминов Эйслер «разъясняет» в том же духе.

Возможно, здесь, наконец, имеет смысл разработать некую «серую» — в отличие от «черно-белой», работающей по принципу «да-нет», — логику, за необходимость которой на симпозиуме по проектированию машин, имитирующих поведение человеческого мозга, в 1956 г. так решительно ратовал Отто Г. Шмитт [10, стр. 72—75; 78—79]? Он говорил: «Развивая мое первоначальное утверждение, что современные цифровые вычислительные машины представляют собой металлические воплощения элементарной прямолинейной школьной логики и соответствующих формальных операций элементарной математики, я должен, по-видимому, предложить физиологические факты, основываясь на которых мы могли бы построить другие, менее логичные, но более умные машины, которые в конце концов расширят скорость и диапазон наших мыслительных способностей, подобно тому как современные вычислительные машины расширяют наши способности механического сложения» [10, стр. 73]. И далее: «Я предвижу развитие вычислительных устройств с «серой» логикой, в которых решения создаются статистически» [10, стр. 75].

Шмитту возражал А. Г. Эттингер, который спрашивал: зачем строить машины с такими же способностями и ограничениями, как у человеческого мозга? Ему это «не представляется ни полезным, ни экономичным, если вспомнить, как много поколений потребовалось, чтобы мы пришли к современному состоянию знаний» [10, стр. 78].

Все эти вопросы приведены здесь мною не потому, что я хочу предложить сейчас какое-нибудь их решение. Я недостаточно знакома с вопросом, чтобы позволить себе сделать это. Но мне хочется подчеркнуть то обстоятельство, что и в технических приложениях математической логики, помимо специальных вопросов этой науки, есть не только вопросы математики и техники. Даже не только вопросы математики, техники и нейрофизиологии. Есть и подлинно философские вопросы, для решения которых нужно быть таким философом, который разбирается в специальной проблематике математической логики и владеет способами ее приложения. Такие кадры философов у нас есть, но число их можно значительно увеличить и работу сделать значительно более продуктивной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20.
2. Н. А. Шанин. О конструктивном понимании математических суждений. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LII, 1958, стр. 226—311.
3. Д. Гильберт. Основания геометрии. ОГИЗ, 1948.
4. P. Lorenzen. Die Widersprachsfreiheit der klassischen Analysis. Math. Zs., Bd 54, H. 1, 1954.
5. P. Lorenzen. Einführüng in die operative Logik und Mathematik. Berlin—Göttingen—Heidelherg, 1955.
6. В. И. Ленин. Философские тетради. М., 1947.
7. H. Curry, R. Feys. Combinatory logic. Amsterdam, 1958.
8. А. А. Марков. Теория алгорифмов. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1954.
9. А. Н. Колмогоров. Автоматы и жизнь. «Техника молодежи», 1961, № 10.
10. «Кибернетический сборник», вып. 1, М., 1960.

В. В. Донченко

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОБЛЕМОЙ РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ СТРОГОЙ ИМПЛИКАЦИИ АККЕРМАНА

Как известно, логической операции импликации в обычной речи соответствует связка «если. . .то». Однако употребление связки «если. . .то» в условном предложении предполагает связь по смыслу между частями этого предложения, а материальная импликация, употребляемая в классической логике, этой связи не отражает. Действительно, истинность высказывания $A \supset B$ не предполагает какой-либо связи между A и B. Кроме того, имеются так называемые «парадоксы материальной импликации»: истинное высказывание следует из любого высказывания, и из ложного высказывания следует любое высказывание. Различные логики строили такие логические исчисления, в которых импликация как-то отражала бы связь по смыслу. Одним из таких исчислений и является рассматриваемое здесь исчисление строгой импликации Аккермана, построенное им в 1956 г.

Исчисление строгой импликации Аккермана построено в двух видах: в виде исчисления схем и в виде исчисления формул. Оба эти исчисления эквивалентны друг другу. Здесь будет идти речь только об исчислении формул. Оно строится следующим образом. Алфавит исчисления состоит из бесконечного числа букв A, B, C,. . . и знаков логических операций & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\overline{}$ (отрицание), $\rightarrow$ (строгая импликация).

Понятие формулы определяется индуктивно:

1. Любая буква A, B, C есть формула.
2. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — формулы.
3. Никаких других формул, кроме определенных согласно 1 и 2, нет.

Аксиомы исчисления строгой импликации Аккермана задаются в виде схем, т. е. метаматематических выражений, дающих конкретную аксиому всякий раз, когда на место метаматематических переменных $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ подставляются формулы этого исчисления. Исчисление строгой импликации Аккермана содержит 15 схем аксиом и 4 правила вывода.

Схемы аксиом:

1. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (закон тождества).
2. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$ (правило силлогизма).
3. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}))$ (второе правило силлогизма).
4. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ (правило сокращения).

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \\ 6.\ \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \end{array}\right\} \text{(конъюнкция в антецеденте).}$$

7. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})$ (конъюнкция в консеквенте).

$$\left.\begin{array}{l} 8.\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \\ 9.\ \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \end{array}\right\} \text{(дизъюнкция в консеквенте).}$$

10. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \,\&\, (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$ (дизъюнкция в антецеденте).
11. $(\mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})) \to (\mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C}))$ (дистрибутивность).
12. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$ (контрапозиция).
13. $\mathfrak{A} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}$ (связь строгой импликации с материальной).
14. $\mathfrak{A} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ (двойное отрицание в консеквенте).
15. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \to \mathfrak{A}$ (двойное отрицание в антецеденте).

Правила вывода:

(α) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ (modus ponens).

(β) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$ (объединение).

(γ) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ (modus ponens для материальной импликации).

(δ) $\dfrac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}}$ (здесь $\mathfrak{B}$ — логическое тождество, т. е. формула, выводимая только из аксиом).

Для исчисления строгой импликации Аккермана, как и для любого логического исчисления, одной из важнейших проблем является проблема разрешения, состоящая в нахождении алгоритма, который для любой формулы исчисления строгой импликации Аккермана устанавливал бы, доказуема ли эта формула в данном исчислении или нет. Эта проблема для исчисления строгой импликации Аккермана пока еще не решена. Установлены лишь необходимые условия доказуемости формул этого исчисления, одно из которых рассматривается здесь.

Рассмотрим матрицу $S = \langle M, D, \&, \vee, ^{-}, \rightarrow \rangle$, где M — множество всех значений, D — подмножество выделенных значений, а, $\&$, $\vee$, $^{-}$ и $\rightarrow$ — операции исчисления строгой импликации Аккермана. Формула $\mathfrak{A}$ этого исчисления общезначима в S, если при любой подстановке элементов из M вместо переменных в $\mathfrak{A}$ и производстве соответствующих операций всегда получается значение из D. Назовем матрицу S аккермановской, если всякая формула, доказуемая в исчислении строгой импликации Аккермана, общезначима в S. Если имеет место и обратное, т. е. если всякая общезначимая в S формула доказуема в исчислении строгой импликации Аккермана, то матрица S называется характеристической матрицей этого исчисления. Нахождение характеристической матрицы решило бы, очевидно, проблему разрешения. Но такой матрицы еще не найдено (как будет показано ниже, такая матрица может быть только бесконечной).

В исчислении строгой импликации Аккермана можно ввести отношение частичного упорядочивания следующим образом: полагаем $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, если в этом исчислении доказуема формула $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$. При таком введении отношения $\leqslant$ исчисление строгой импликации Аккермана становится дистрибутивной структурой, в которой роль сложения и умножения играют, соответственно, дизъюнкция и конъюнкция. Поэтому при построении аккермановской матрицы S множество значений M естественно задавать в виде дистрибутивной структуры.

Эта структура изображена на рис. 1 (стрелка, поставленная в направлении от x к y, обозначает, что $x \leqslant y$).

Подмножество D выделенных значений состоит из элементов c, a, b, 1.

Таблица для $x \to y \; (x, y \in M)$

$x \backslash y$	0	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	c	b	a	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{a}$	0	a	0	a	0	0	a	1
$\bar{b}$	0	0	b	b	0	b	0	1
$\bar{c}$	0	0	0	c	0	0	0	1
c	0	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	c	b	a	1
b	0	0	$\bar{b}$	$\bar{b}$	0	b	0	1
a	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	0	0	a	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1

Рис. 2.

Таблица для $\bar{x} \; (x \in M)$

x	$\bar{x}$
0	1
$\bar{a}$	a
$\bar{b}$	b
$\bar{c}$	c
c	$\bar{c}$
b	$\bar{b}$
a	$\bar{a}$
1	0

Рис. 3.

Таблицы для операций & и $\bigvee$ мы задавать не будем, ибо это операции, относительно которых множество M является структурой. Приводим только таблицы для $^{-}$ и $\to$.

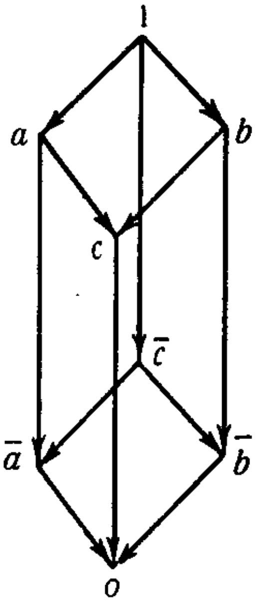


Рис. 1.

Из таблицы для $x \to y$ видно, что $x \to y \in D$ только тогда, когда $x \leqslant y$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что построенная здесь матрица является аккермановской. Для этого достаточно показать, что все аксиомы исчисления строгой импликации Аккермана общезначимы в этой матрице и что по правилам вывода из общезначимых в этой матрице формул получаются общезначимые.

Для данной матрицы имеет место следующая лемма.

Лемма. Если в формулу исчисления строгой импликации Аккермана вместо всех переменных подставить значение a, то эта формула примет либо значение a, либо значение $\bar{a}$. Аналогично с заменой a на b и $\bar{a}$ на $\bar{b}$.

Лемма легко доказывается индукцией по построению формулы.

При помощи этой леммы доказывается теорема.

Теорема. Формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ исчисления строгой импликации Аккермана недоказуема, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не содержат хотя бы одной общей переменной[1].

Доказательство. Пусть в формуле $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не имеют ни одной общей переменной. Подставим вместо всех переменных, входящих в $\mathfrak{A}$, значение a, а вместо всех переменных, входящих в $\mathfrak{B}$, — значение b. Тогда, в силу доказанной леммы, формула $\mathfrak{A}$ примет либо значение a, либо значение $\bar{a}$, а формула $\mathfrak{B}$ примет либо значение b, либо значение $\bar{b}$. Из таблицы для $x \to y$ видно, что в любом из этих случаев формула примет значение 0, а 0 не входит в D. Поэтому формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ не доказуема, что и доказывает теорему.

Эта теорема показывает, что из истинности формулы $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ в исчислении строгой импликации Аккермана следует, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ как-то связаны между собой, именно: $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ должны иметь хотя бы одну общую переменную. Из этой теоремы следует далее, что в данном исчислении не существует формулы, из которой следовала бы любая формула, а также формула, которая следовала бы из любой формулы. В исчислении строгой импликации Аккермана поэтому полностью устранены «парадоксы материальной импликации». Тем самым строгую импликацию Аккермана можно считать некоторым приближением к отражению связи по смыслу.

Выше было показано, что исчисление строгой импликации Аккермана является дистрибутивной структурой. Дистрибутивная структура называется импликативной, если для любых двух элементов x и y этой структуры существует такой ее элемент z, что $x \cdot z \leqslant y$, и если $x \cdot t \leqslant y$, то $t \leqslant z$. Поскольку $x \cdot t \leqslant x$ для любого t, то для того, чтобы структура была импликативной, необходимо, чтобы в ней имелся такой элемент z, что $t \leqslant z$ для любого элемента t этой структуры. Отсюда следует,

---

[1] Теорема высказана Д. Лахути в 1957 г.

что исчисление строгой импликации Аккермана — не импликативная структура. Действительно, если бы это исчисление было импликативной структурой, то в нем была бы такая формула $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$ для любой формулы $\mathfrak{B}$ этого исчисления, т. е. формула $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ была бы доказуемой для любого $\mathfrak{B}$, что, как доказано, невозможно.

Матрица, при помощи которой была доказана приведенная выше теорема, не является характеристической для рассматриваемого исчисления. В самом деле, в ней общезначима формула $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$, не доказуемая в исчислении строгой импликации Аккермана. Недоказуемость этой формулы можно установить при помощи другой матрицы (предложенной самим Аккерманом).

Более того, для исчисления строгой импликации Аккермана вообще не существует конечной характеристической матрицы.

Для доказательства этого построим последовательность матриц $T_n = \langle K_n, D_n, \&, \vee, {}^{-}, \to \rangle$. Элементами множества K_n являются числа $-n, -(n-1), -(n-2), \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, (n-2), (n-1), n$. Отношение порядка определяется так же, как и для целых чисел. Множество D_n состоит из всех положительных чисел. Операции на множестве K_n определяются следующим образом:

$$x \& y = \min(x, y) \qquad x \to y = \begin{cases} \max(|x|, |y|), & \text{если } x \leqslant y \\ \min(-|x|, -|y|), & \text{если } x > y \end{cases}$$
$$x \vee y = \max(x, y)$$
$$\bar{x} = -x$$

Нетрудно показать, что T_n для любого n является коаккермановской матрицей. Пусть теперь существует конечная характеристическая матрица U для исчисления строгой импликации Аккермана, и пусть ее множество M состоит из k элементов. Возьмем формулу

$$(*)\ (A_1 \to A_2) \vee (A_1 \to A_3) \vee \ldots \vee (A_1 \to A_{k+1}) \vee (A_2 \to A_3) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (A_2 \to A_{k+1}) \vee \ldots \vee (A_k \to A_{k+1}).$$

Если подставить любой набор элементов из M вместо $A_1, \ldots, A_{k+1}$, то по крайней мере две переменные примут одинаковые значения. Пусть переменные A_i и A_j приняли одно и то же значение α. Тогда формула $A_i \to A_j$ примет значение $\alpha \to \alpha$, которое является выделенным в силу доказуемости формулы $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ и того, что рассматриваемая матрица является аккермановской. Но, в силу доказуемости формул $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, если форула $\mathfrak{A}$ принимает выделенное значение, то и формула $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}$ примет выделенное значение, каковы бы ни были формулы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Следовательно, формула (*) должна принять выделенное значение. Рассмотрим теперь матрицу T_{k+1} и подставим в формулу (*) —1 вместо A_1, —2 вместо A_2 и т. д. Согласно определению операций $\to$ и $\vee$, в T_{k+1} формула (*) примет значение —2, которое не является выделенным. В силу того, что матрица T_{k+1} аккермановская, отсюда следует, что формула (*) не доказуема в исчислении строгой импликации Аккермана. Вместе с тем она общезначима в характеристической матрице U, что невозможно. Поэтому матрица U не является характеристической, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Ackermann. Begründung einer strengen Implikation J. Symbolic Zogic, 1956 N 21, p. 113—128.

Н. И. Стяжкин и Б. Р. Певзнер

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СПЕЦРЕФЕРИРОВАНИЯ

Разработка теории и практики автоматического реферирования — одна из важных задач современной документалистики. Следует подчеркнуть, что при этом, конечно, не ставится задача моделировать сам процесс мышления референта; речь идет лишь о разработке таких способов реферирования, при которых референт мог бы действовать, так сказать, стандартным образом, в известном смысле механически, шаблонно, так, чтобы индивидуальные различия в творческом почерке референтов (приводящие ныне, как известно, к возведению реферирования в своего рода разновидность искусства) не оказывали влияния при изготовлении стандартизованных референтов.

Объект реферирования — это статья, имеющая определенный заголовок. Верхней границей объема реферата является поэтому сам текст статьи, нижней границей — ее заголовок. Объем текста реферата лежит где-то посредине между этими двумя пределами. К реферату естественно предъявить следующие два требования:

а) он должен получаться автоматическим путем (в указанном выше смысле);

б) реферат должен быть некоторой организованной системой, по которой в дальнейшем можно было бы проводить информационный поиск.

В настоящее время существуют три главных способа реферирования (для того, чтобы отличить их от обычных способов реферирования, принятых ныне в реферативных журналах, мы будем называть их методами специального реферирования или, короче, спецреферирования).

(I). Стохастический метод Луна, основанный на применении различных статистических критериев. Получаемый в данном случае реферат представляет собой некоторое множество фраз, выбранных из данной статьи, в результате определения по некоторым правилам меры значимости фраз этой статьи.

(II). Использование так называемых ключевых терминов. Заранее создается словарь ключевых терминов из данной области науки. Те термины из статьи, которые входят в этот словарь, без повторений заносятся в ее реферат, который, таким образом, выглядит как некоторая цепочка логически не упорядоченных терминов.

(III). Анкетное реферирование (включая также разработку анкет с заранее фиксированными ответами на вопросы). Разновидностью анкетного реферирования является способ получения так называемых рефератов телеграфного стиля, разработанный Дж. Перри, М. Берри и Кентом [2]. Анкеты желательно разрабатывать как с целью хранения информации, так и с целью ее поиска.

Из способов (I)—(III) лишь метод (III) в какой-то степени удовлетворяет сразу двум основным указанным выше требованиям к реферату; способы (I) и (II), очевидно, не удовлетворяют требованию в), поскольку в получаемом по их предписаниям реферате не проводится никакой реорганизации исходной информации, содержащейся в заданной статье.

Центральная проблема теории и практики спецреферирования — вопрос о выборе критерия значимости термина. В зависимости от ее решения мы получаем тот или иной способ спецреферирования. Например, Лун определяет значимость термина как некоторую функцию от его частотности, точнее от частоты его встречаемости в данном тексте.

В настоящей статье мы предлагаем другой критерий значимости термина, который (критерий) можно было бы назвать семантическим.

Основная теоретическая предпосылка, из которой мы намерены исходить, состоит в следующем: утверждается, что значимость термина (или, как иногда еще говорят, его весомость, точнее — мера его весомости) есть функция от числа и характера тех отношений (связей), в которые данный термин вступает (в данном контексте, имея в виду под «контекстом» предложенную для спецреферирования статью). Так, весомость термина определяется нами как функция весомости тех отношений, в которые вступает данный термин.

Следует пояснить, что́ мы имеем в виду под выражением «отношения, в которые вступает данный термин». Пусть мы имеем дело с некоторой узкой областью науки O, в которой выделены характеризующие ее предикатные константы R^o_1, R^o_2, R^o_{n-1}, R^o_n. Если это, например, синтетическая органическая химия, то такими предикатными константами будут: «быть исходным веществом» (R^o_1), «быть продуктом» (R^o_2), «быть катализатором» (R^o_{n-m}, где $m < n$) и т. п. Пусть данный термин T^o может выступать, например, в роли исходного вещества или же в роли продукта реакции (а в соответствующих различных контекстах — сразу в обеих ролях). В таком случае говорят, что термин T^o должен быть снабжен или индексом R^o_1, или индексом R^o_2, а знаки R^o_1, или R^o_2 суть знаки тех отношений, в которые он вступает (знаки его связей). Ясно, что термин T^o может, вообще говоря, вступать сразу в несколько отношений типа R. Приписывая терминам T какого рода приставки R, мы тем самым фиксируем непосредственно не отношения между терминами в области O, а отношения терминов T к набору основных для данной области O предикатных констант, т. е. непосредственно выявляем отношение данных терминов к основным категориям (именам основных предикатных констант) рассматриваемой области.

Вводится двухместный предикат $W(T, R)$, который читается: «термин T вступает в отношение R»; более подробно: «термин T характеризуется категорией R (в области O)». Следовательно, смысл выражения «отношения, в которые вступает данный термин» равносилен значению выражения «синтетические индексы» в смысле [2].

Основной задачей нашей статьи явится разработка удовлетворительных способов выявления и оценки весомости отношений, в которые вступает термин. Вопрос же об определении веса фразы естественно сводится к определению (суммированию) весов составляющих ее терминов. Иллюстрированным объектом способа спецреферирования, предлагаемого в нашей статье, будет служить одна узкая область электротехники — электронно-лучевые трубки и их применение. Предварительный этап заключался в выделении основных предикатов, характерных для данной области. Говоря языком логики, речь шла о выделении основных категорий, без которых невозможно разобраться в сети понятий и объектов рассматриваемой области. Был введен следующий набор предикатных констант [2]:

R_1 — обозначать устранение;
R_2 — быть обрабатываемым материалом;
R_3 — обозначать лишение; отношение отсутствия у объекта каких-либо свойств;
R_4 — быть носителем свойств;
R_5 — быть компонентом;
R_6 — быть результатом процесса;
R_7 — быть исходным материалом;
R_8 — быть прибором;
R_9 — обозначать носитель географической локализации;
R_{10} — обозначать данное свойство;
R_{11} — быть определяемым свойством;
R_{12} — быть процессом;
R_{13} — быть условиями процесса;
R_{14} — обозначать местоположение;
R_{15} — быть страдательным свойством;
R_{16} — быть воздействующим свойством;
R_{17} — быть воздействующим объектом;
R_{18} — быть страдательным объектом;
R_{19} — обозначать область применения;
R_{20} — обозначать временную локализацию;
R_{21} — обозначать географическую локализацию;
R_{22} — указывать на индекс организации (в административном смысле);
R_{23} — быть характеристикой. Это — индекс, относящий определяемое к определяющему. Ставится после определяемого и перед определяющим;
R_{24} — обозначать тип документа;
R_{25} — быть действием;
R_{26} — указывать на заказчика;
R_{27} — быть способствующим фактором;
R_{28} — указывать на индекс класса организаций (в административном смысле);
R_{29} — быть условием действия;
R_{30} — быть результатом действия.

Предикатные константы $R_1 \dots R_{30}$ ставятся перед терминами как их приставки. R_{12} отличается от R_{25} как «физический процесс» разнится от «механического действия».

Приведем несколько примеров расстановки R_i перед соответствующими терминами. Если в предложении говорится о флуоресценции экрана вследствие облучения, то перед термином «флуоресценции» будет поставлен индекс R_6, а перед термином «экран» будет поставлен индекс R_{18} (страдательного объекта). Проиллюстрируем процесс расстановки в таком конкретном предложении «под действием ускоряющего поля первой линзы электроны, вылетающие из точек A и B, собираются в узкие пучки». После расстановки в нем индексов основных предикатных констант это предложение принимает вид: R_{12}, R_{29} (под действием ускоряющего поля), R_8 (линзы R_{23} (первой)), R_{25}, R_6 (R_{17} (электроны), вылетающие), R_{14} (из точек A и B), R_{30} собираются R_{23} (в узкие пучки).

После фиксации основных предикатных констант мы выделяем затем некоторый конечный список основных типов предложений данной области (выделяемых содержательно, а не на основе каких-либо формальных грамматических критериев). Обозначим элементы этого набора через P_1, $P_2, \dots P_{m-1}$, P_m, которые суть не что иное, как основные типы заголовков статей (и рефератов, поскольку заголовки статей совпадают с заголовками соответствующих им рефератов) данной («электронно-лучевой») области. Каждое из $\mathscr{P}_j (j = 1, \dots m)$ может рассматриваться как одно из оснований деления, по которому (основанию) производится классификация «заголовочного материала» журнальных статей по электронно-лучевым трубкам. Устанавливается, таким образом, m различных абстрактных вариантов заголовков, причем каждый реальный заголовок должен или совпадать с каким-либо одним из $\mathscr{P}_j$, или сводиться к некоторой комбинации определенных из $\mathscr{P}_j$. Выделение производится по некоторым признакам (предикатам, категориям), которые носят более общий характер, чем многие из R_i. Последнее замечание дает основание принять неравенство $m < n$, т. е. число выделяемых основных типов предложений меньше числа выделенных основных предикатных констант. В нашем случае $m = 6$, $n = 30$. Перечислим теперь $\mathscr{P}_j (j = 1, \dots 6)$.

$\mathcal{P}_1$ — строение узлов, конструкций и их параметры;

$\mathcal{P}_2$ — принцип действия прибора и физика протекающих в нем процессов;

$\mathcal{P}_3$ — технология изготовления приборов и их конструкций. Сюда включается, например, технология изготовления экранов и мозаики, колбы трубки и других элементов трубки;

$\mathcal{P}_4$ — методика производства процессов. Сюда включаются, например, методика измерения, метод отбора трубок с целью определения качества их работы и пр., способы юстировки отпайки, анализа импульсов, опыты самоиндукции и т. д.;

$\mathcal{P}_5$ — электрические цепи, их расчет и характеристики (сюда относятся электрические схемы развертки, синхронизации, усиления и т. д.);

$\mathcal{P}_6$ — применения электронно-лучевых трубок (сюда включается, например, деление трубок по назначению, по областям применения и т. д.).

После фиксации набора $\mathcal{P}_j$ следующим этапом будет изучение строения $\mathcal{P}_j$ с точки зрения R_i, которые входят в эти $\mathcal{P}_j$. Для каждого $\mathcal{P}_j$ устанавливается некоторая каноническая структура — в виде дерева, — узлы (точки) которого представляют собой имена входящих в данное $\mathcal{P}_j$ некоторых из R_i, а линии между этими узлами соответствуют отношениям (типа подчинения или соподчинения), соответствующими между данными R_i в данном типе предложений. Деревья — это как бы некоторые иерархические сети с конечным числом узлов (точек), упорядоченных по определенным уровням. Между двумя соседними узлами (т. е. узлами, соединенными линией без каких бы то ни было промежуточных узлов) существует отношение непосредственного подчинения (нижнего узла верхнему или нижних — верхнему). Любой узел не может быть непосредственно подчинен более чем одному узлу. Если из двух соседних узлов верхний назовем непосредственным предком нижнего, а нижний — непосредственным потолком верхнего, то для наших деревьев справедливо утверждение: каждый потолок может иметь не более одного непосредственного предка. Пользуясь другой терминологией, можно сказать, что в рассматриваемых нами деревьях существует сильная иерархия между входящими в них узлами. По мере удаления от верхушки дерева и приближения к его корням интенсивность отношений (узлов) растет, зато падает их экстенсивность, поскольку существует закон обратной зависимости между экстенсивностью и интенсивностью отношения (по аналогии с законом обратной связи между объемом и содержанием понятия, который установлен в традиционной логике).

Примем в целях сокращения выражений и мнемонического удобства следующую терминологию. Верхушку дерева (т. е. узел, выше которого нет ни одного другого узла) назовем универсальным узлом или прародителем. Узел, от которого непосредственно отходит (вниз) только один другой узел, назовем единичным узлом. Узел, от которого не отходит (вниз) ни одного другого узла, будем именовать нулевым. Узел, от которого непосредственно отходят (вниз) два или более узлов, назовем множественным узлом. Очевидно, что прародитель может быть как единичным, так и множественным узлом. Узлы упорядочиваются по уровням. Уровень прародителя считается первым. Номера уровней растут по натуральному ряду сверху вниз. Узлы считаются лежащими на одном уровне, если и только если они имеют одинаковое число предков. Прародитель не имеет предков. Нулевой узел лишен потомков. Семейством узла будем называть множество его непосредственных потомков. Число элементов этого множества назовем рангом семейства узла. Ранг семейства нулевого узла равен нулю, единичного — единице. В дальнейшем ранг семейства узла будем обозначать через S (с индексами или без индексов).

Переходим теперь к фундаментальному вопросу о том, как приписывать веса узлам (т. е. отношениям (предикатным константам), которые символизируются посредством узлов). Первый принцип, из которого мы при этом будем исходить, сводится к тому, что если дерево состоит только из единичного и нулевого узлов, а вес единичного известен, то вес нулевого будет равен весу единичного, увеличенному на единицу. Другими словами, вес нулевого узла равен весу его непосредственного предка, увеличенному на единицу. Второй принцип весовой оценки узлов: вес узла существенно зависит от ранга его семейства. Исходя из этих двух принципов, естественно сформулировать следующий способ приписывания весов узлам. Выразим его формулой

$$P = P^* + S(P^* + 1), \tag{I}$$

где P — вес узла, P^* — вес его непосредственного предка, увеличенный на единицу, S — ранг семейства узла. Обозначив вес непосредственного предка узла с весом P через P' и зная, что $P^* = P + 1$, преобразуем формулу (I) в формулу

$$P = P'(S+1) + 2S + 1, \tag{II}$$

которую можно представить также в следующей эквивалентной форме:

$$P = P' + 1 + S(P' + 2). \tag{III}$$

Минимальный вес универсального узла равен 3, так как при $P' = 0$; $S = 1$ (т. е. когда универсальный узел точечный) формула (II) дает

$$P_{\min} = 0(1+1) + 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

Следовательно, таков же минимальный вес узла вообще. Минимальный вес узла, не являющегося универсальным узлом, равен 4. В этом случае мы имеем дерево вида $3 \rightarrow x$, откуда $P_x = 3(0+1) + 2 \cdot 0 + 1 = 4$.

Легко указать минимальный вес универсального узла. Это число, очевидно, равно (при $S = n - 1$)

$$P_{\max}^{\text{унив}} = 2(n-1) + 1 = 2n - 1,$$

где n — число основных предикатных констант рассматриваемой области.

Итак, вес универсального узла заключен в следующих границах:

$$3 \leqslant P^{\text{унив}} \leqslant 2n - 1,$$

где n — число R_i.

Для веса узла, не являющегося универсальным, можно указать лишь нижнюю границу, а именно:

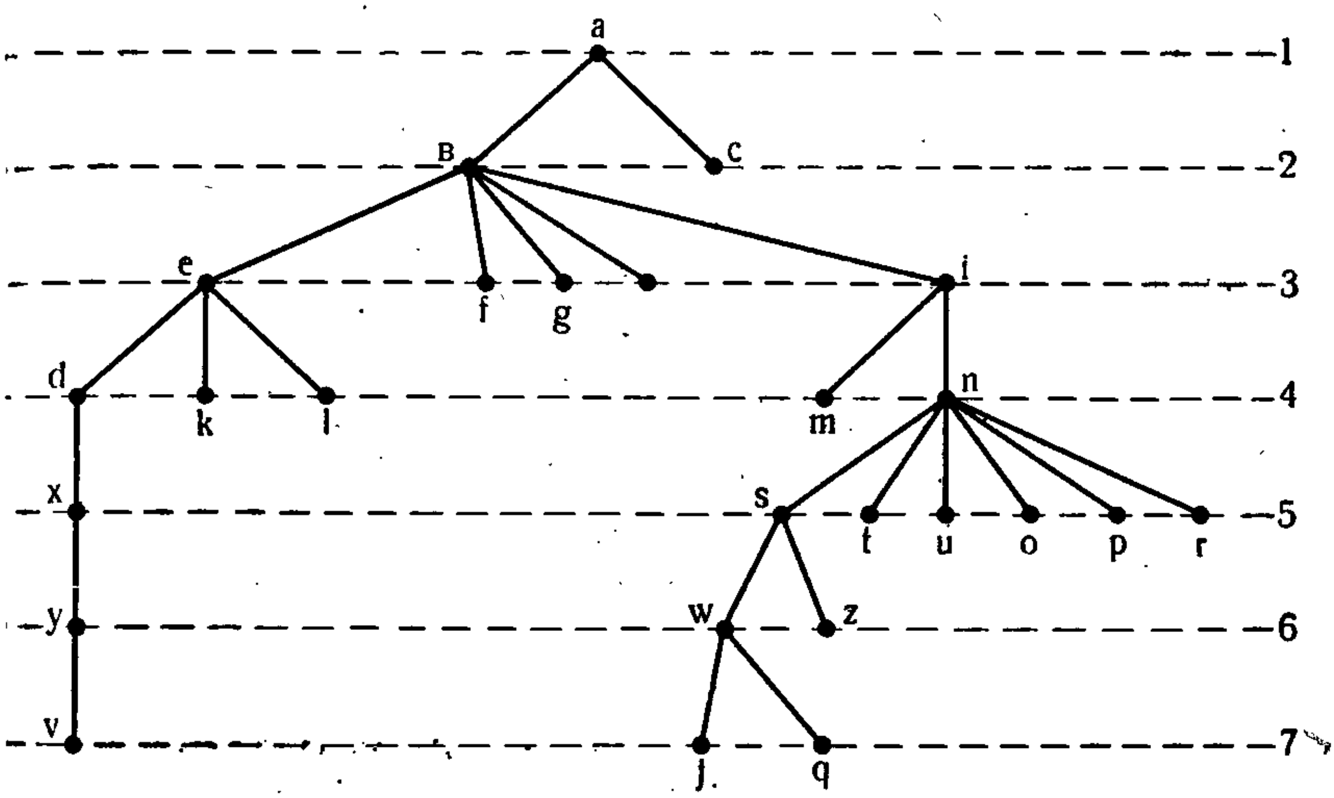
$$P_{\min} \geqslant 4.$$

Для примера взвесим узлы на следующем дереве (уровни показаны пунктиром, узлы названы малыми латинскими буквами)

Действуя согласно предписаниям формулы (II), имеем: $P_a = 1 + 2 \cdot 2 = 5$; $P_c = 6$; $P_b = 6 + 5 \cdot 7 = 41$; $P_f = P_g = P_h = 42$; $P_e = 42 + 3 \cdot 43 = 171$; $P_k = P_l = 172$; $P_d = 172 + 1 \cdot 173 = 345$; $P_x = 691$; $P_y = 1383$; $P_v = 1384$; $P_i = 42 + 5 \cdot 43 = 257$; $P_m = P = P_o = P_p = 258$;

$P_n = = 1035$; $P_t = P_u = 1036$; $P_s = 3111$; $P_w = 9335$; $P_j = P_q = 9336$.

На чертеже 1 видно, что среди элементов одного и того же семейства тот элемент обладает наибольшим весом, ранг собственного веса семейства которого наибольший.



Чертеж 1.

Рассмотрим ближе формулу подсчета весов отношений, а именно выражение (II), т. е. уравнение

$$P = P'S + P' + 2S + 1. \qquad \text{(IV)}$$

Легко показать, что уравнение (IV) является уравнением гиперболического параболоида, причем мы принимаем во внимание лишь его целочисленные решения. Приведем уравнение (IV) к каноническому виду путем введения некоторых вспомогательных переменных, с целью чего воспользуемся подстановкой: $P' = u + v$; $S = u - v$. Подставляя эти значения в уравнение (IV), получим:

$$P = (u + v)(u - v) + (u + v) + 2(u - v) + 1, \qquad \text{(V)}$$

что после элементарных преобразований дает:

$$P = u^2 - v^2 - 3u - v + 1. \qquad \text{(VI)}$$

Положим далее

$$u = u_0 - {}^3/_2; \quad v = v_0 - {}^1/_2.$$

Имеем

$$P = (u - {}^3/_2)^2 - (v_0 - {}^1/_2)^2 + 3(u_0 - {}^3/_2) - (v_0 - {}^1/_2) + 1,$$

откуда

$$P = u_0^2 - 3u_0 + {}^9/_4 + v_0 - v_0^2 - {}^1/_4 + 3u_0 - {}^9/_2 - v_0 + {}^1/_2 + 1,$$

что равносильно

$$y = u_0^2 - v_0^2 - 1, \text{ где } u_0 = u + {}^3/_2,\ v_0 = v + {}^1/_2. \quad \text{(VIII)}$$

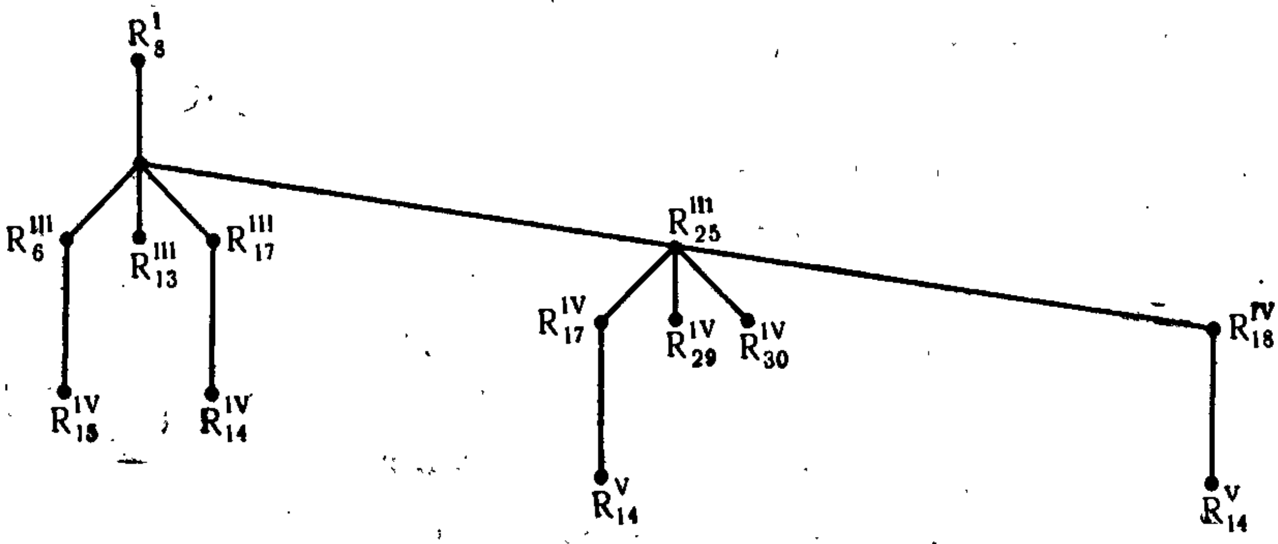
Тем самым, мы привели уравнение (IV) к его каноническому виду (VIII).

Построив для каждого из основных типов предложений соответствующее ему дерево отношений, мы получим некоторое множество $\{T\}$ деревьев, элементы которого находятся во взаимнооднозначном соответствии с элементами множества P, т. е. имеют место соотношения:

$$T_1 \longleftrightarrow \mathscr{P}_1, \qquad T_2 \longleftrightarrow \mathscr{P}_2,$$

$$T_3 \longleftrightarrow \mathscr{P}_3, \ldots, T_m \longleftrightarrow \mathscr{P}_m,$$

где символ «$\longleftrightarrow$» есть знак взаимнооднозначного соответствия. В качестве примера построим T_2 для $\mathscr{P}_2$ (т. е. для класса предложений типа: принцип действия прибора и физика протекающих в нем процессов). Соответствующие предикатные константы берем из перечня $R_1 - R_{30}$ (см. стр. 28). Дерево T_2 отношений для P_2 имеет вид:



Чертеж 2.

Верхние римские индексы при R_i указывают на номер уровня, на котором располагается данное отношение. Строго говоря, следовало бы еще внести нижние индексы при R_i (фиксирующие направление заполнения R_i данного уровня k). Ведь может случиться, что одно и то же отношение R_k хотя и лежит в разных местах одного и того же уровня, но имеет тем не менее различный вес на этих местах, что легко усмотреть из примера соответствующего дерева.

Обратимся вновь к черт. 2. Взвесим R_i и P_2.

Имеем $R_8^{\mathrm{I}}=3$; $R_{12}^{\mathrm{II}}=29$; $R_6^{\mathrm{III}}=61$; $R_{13}^{\mathrm{III}}=62$; $R_{17}^{\mathrm{III}}=R_{18}^{\mathrm{III}}=61$; $R_{25}^{\mathrm{III}}=154$; $R_{18}^{\mathrm{IV}}=309$; $R_{14}^{\mathrm{V}}=310$; $R_{29}^{\mathrm{IV}}=R_{30}^{\mathrm{IV}}=155$; $R_{14}^{\mathrm{IV}}=62$.

На чертеже 2 изображено дерево предложения-эталона. Подобным же образом могут быть построены эталонные деревья для $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_3$, $\mathscr{P}_4$, $\mathscr{P}_5$ и $\mathscr{P}_6$.

Теперь нам осталось описать в общем виде предлагаемый способ спецреферирования, так как весь необходимый для этого понятийный аппарат и способ взвешивания отношений уже обсуждены выше. Прежде всего, сравниваем имеющиеся в статье фразы с элементами множества $\{\mathscr{P}\}$, т. е. устанавливаем некоторое соответствие между реальными и эталонными предложениями. Все множество фраз статьи (обозначим его через Ф) разбивается на три подмножества:

(1) $\{Ф_л\}$ — это фразы, которые не совпадают ни с одним из $\mathscr{P}_j$ и ни с одной комбинацией из некоторых $\mathscr{P}_j$. Ни один элемент множества $\{Ф_л\}$ не входит поэтому в искомый реферат;

(2) $\{Ф_э\}$ — это множество тех фаз статьи, каждая из которых подводится под какой-нибудь отдельный элемент множества $\{\mathscr{P}\}$. Другими словами, из $\{\mathscr{P}\}$ выделяется некоторое подмножество $\{\mathscr{P}_э\}$, такое, что имеют место соотношения

$$Ф_{э_1} \longleftrightarrow \mathscr{P}_{i_1}, \quad Ф_{э_2} \longleftrightarrow \mathscr{P}_{i_2}, \ldots, \quad Ф_{э_t} \longleftrightarrow \mathscr{P}_{i_t},$$

где «$\longleftrightarrow$» выступает как знак взаимнооднозначного соответствия. Множество $\{Ф_э\}$ в ряде конкретных случаев может оказаться пустым;

(3) $\{Ф_с\}$ — это те фразы статьи, каждая из которых не может быть подведена в точности под одно $\mathscr{P}_j$, но может быть выражена некоторой комбинацией определенных $\mathscr{P}_j$.

Материалом для будущего спецреферата могут служить только некоторые элементы суммарного множества $\{Ф_э\} \cup Ф_c\}$, где «$\cup$» есть знак объединения (суммы) множеств. Каждый из элементов $\{Ф_c\}$ может быть расчленен на столько частей, скольким $\mathscr{P}_j$ соответствует. Таким образом, из элементов множества $\{Ф_c\}$ можно образовать некоторые новые элементы, которые окажутся устроенными так же, как и элементы множества $\{Ф_э\}$, т. е. принципиального структурного различия между ними не будет. Обозначим вновь образованное таким образом множество через $\{Ф_c\}^*$. Элементы этого множества можно привести теперь во взаимнооднозначное соответствие с соответствующими $\mathscr{P}_j$ (и, следовательно, также и с T_j). Имеем

$$Ф_{c_1} \longleftrightarrow \mathscr{P}_{i_1} \longleftrightarrow T_{i_1},$$
$$Ф_{c_2} \longleftrightarrow \mathscr{P}_{i_2} \longleftrightarrow T_{i_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Ф_{c_s} \longleftrightarrow \mathscr{P}_{i_s} \longleftrightarrow T_{i_s},$$

где $s \leqslant m$. Образуем теперь некоторое множество $\{Ф_р\}$, являющееся объединением множеств $\{Ф_э\}$ и $\{Ф_c\}^*$, т. е. $\{Ф_р\} = \{Ф_э\} \cup \{Ф_c\}^*$. Все фразы искомого спецреферата будут браться лишь из числа фраз этого множества. Расставляем теперь некоторые из R_i внутри каждого из элементов множества $\{Ф_р\}$, т. е. выбираем для них соответствующие канонические деревья (или отдельные фрагменты таких деревьев) из множества $\{T\}$, внутри которых, как мы знаем, каждое из $\mathscr{P}_j$ уже взвешено. После этого остается лишь составить словник терминов, базирующийся на фразах из множества фраз $\{Ф_р\}$, т. е. на фразах, все термины в которых взвешиваются по такому принципу: вес термина равен арифметической сумме весов сопряженных с ним отношений (стоящих в приставке этого термина).

Затем нужно определить разумный нижний порог весомости фразы (т. е. такое число, что все фразы, индекс весомости которых строго меньше этого числа, автоматически не входит в изготовляемый реферат). Этот порог можно выделить путем некоторой серии предварительных экспериментов. Вообще задача определения нижнего порога весомости фразы не составляет особых трудностей, раз все термины уже взвешены. Его можно определить хотя бы по способу Луна, несмотря на то, что весовые индексы терминов получены принципиально отличным от луновского методом.

Те фразы из $\{Ф_р\}$, индекс весомости которых строго меньше нижнего порога весомости фраз, отбрасываются. Обозначим множество выкинутых фраз через $\{Ф_р\}^*$. Искомое множество фраз, составляющее нужный нам спецреферат, есть разность

$$\{Ф_р\} - \{Ф_р\}^*.$$

В заключение упомянем о различии между рефератами, получаемыми по способу Луна, и рефератами, которые должны получиться, если действовать согласно предписаниям предлагаемого нами метода спецреферирования. Реферат Луна есть лишь некоторое подмножество фраз из всего множества фраз данной статьи. Другими словами, в луновский реферат могут входить только готовые фразы из данной статьи, и ничего больше. Не предполагается, следовательно, никакой логической обработки, имеющейся в реферируемой статье-информации. В нашем же способе спецреферирования делается уже первый шаг по пути упомянутой логической обработки, поскольку та или иная фраза оригинальной статьи может быть расчленена на отдельные фрагменты, каждый из которых подводится под соответствующее эталонное предложение (из числа элементов множества $\{\mathscr{P}\}$) (соответственно под отдельное эталонное дерево (или его фрагмент) из числа элементов множества $\{T\}$). Авторы сознают, что предлагаемый ими метод далек от завершенности и нуждается в дальнейшей разработке. В особенности это относится к уточнению процедуры подведения реальных фраз под эталонные предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. P. Luhn. J. res. and development, 1958, vol. 2, N 2 (159).
2. J. W. Perry, M. Berry. Tools for machine literature searching. New York,
3. Г. Э. Влэдуц, В. В. Налимов, Н. И. Стяжкин. Научная и техническая информация как одна из задач кибернетики. «Усп. физ. наук», т. XIX, вып. 1, сентябрь 1959, стр. 13—56.

А. А. Зиновьев

ОБОБЩЕНИЕ СИЛЛОГИСТИКИ

§ 1. Известно несколько способов построения теории категорического силлогизма (силлогистики) в русле идей и методов современной логики. В частности, можно сослаться на работы [1] и [2]. В этой статье мы охарактеризуем путь построения силлогистики, существенно отличающийся от построения ее в упомянутых работах (и других аналогичных им) и более удобный (на наш взгляд) для обобщения ее на силлогистические выводы из высказываний с многоместными предикатами и с квантифицируемыми предикатами.

Под силлогистическим выводом мы понимаем вывод из непустого множества посылок на основе учета субъектно-предикатного строения посылок. Это «определение», разумеется, имеет лишь предварительный описательный характер. Точное определение можно будет дать лишь после того, как будет построена логическая система, которая строится с расчетом на определенную интерпретацию, а именно с расчетом на интерпретацию ее как теории выводов указанного типа. Но здесь важно пока другое обстоятельство: такое расширительное употребление слов «силлогистический вывод» не согласуется с принятым в традиционной логике. Однако во многих работах уже давно не придерживаются традиционного смысла термина «теория категорического силлогизма».

Так, в работах [1] и [2] формулы вида «все x суть x» и «некоторые x суть x» суть правильные формулы теории категорического силлогизма, хотя они не являются фигурами силлогизма (и вообще не являются формулами вывода). Кроме того, именно силлогистика в традиционном смысле этого слова образует отправной пункт и ядро теоретических построений, предлагаемых в данной статье. Наконец, если будет предложено более подходящее название для логических систем рассматриваемого типа, мы охотно его примем.

Но, может быть, имеет смысл говорить в данном случае о системе типа исчислений предикатов (или о модификации исчисления предикатов классической или иной логики), поскольку будут рассматриваться выводы из высказываний с многоместными предикатами (из многосубъектных высказываний)? Как увидим ниже, отличие предлагаемой теории выводов, совершаемых в соответствии с субъектно-предикатной структурой высказываний, от исчислений предикатов настолько существенно, что предпочтительнее рассматривать эту теорию как обобщение традиционной силлогистики.

Мы будем рассматривать только формулы со знаком следования (вывода), т. е. только такие формулы, которые можно интерпретировать как правила вывода. При этом мы будем руководствоваться идеями, изложенными в работе [3], т. е. будем предполагать, что даны некоторые интуитивные предпосылки теории вывода. Правильные модусы силлогизма и «непосредственные» выводы дают прекрасный пример такого рода предпосылок. И обобщенная силлогистика должна быть «непарадоксальной» относительно такой основы.

Вопрос о «теории дедукции» (см. [1]) или об «общей теории вывода» (см. [3]) как о необходимом условии построения силлогистики мы здесь специально не рассматриваем. Общая теория вывода охватывает правила вывода, имеющие силу для любых высказываний и не зависящие от субъектно-предикатного строения высказываний, от наличия или отсутствия модальных знаков и т. п. Мы просто предполагаем, что какая-то общая теория вывода дана, и выделяем затем то специфическое, что добавляется к общей теории вывода в силлогистике, независимо от того, какой вид имеет эта общая теория вывода. Такая абстракция вполне правомерна потому, что специфическое содержание силлогистики не зависит от того, берется ли в качестве общей теории вывода классическое исчисление высказываний с отношением «материального следования», конструктивистское исчисление высказываний, системы строгой и сильной импликации или построения иного рода (см. [3]).

Для рассмотрения специфического содержания силлогистики даже в расширенном ее понимании общая теория вывода в полном объеме вообще не требуется. Достаточно лишь некоторого конечного множества правил вывода (см. [1]). В порядке иллюстрации мы будем использовать некоторую совокупность формул общей теории вывода, достаточную (в частности) для получения всех правильных модусов категорического силлогизма традиционной логики (и недостаточную, конечно, для исследования целого ряда свойств силлогистики как особой логической системы).

Наряду с изложением чисто формальных построений мы постоянно будем прибегать к интерпретациям. Это, конечно, несколько затруднит чтение статьи. Однако интерпретации полезны, если теорию вывода (а силлогистика — часть теории вывода) рассматривать в духе идей, изложенных в [3]. Кроме того, мы постоянно будем отмечать, где речь пойдет об интерпретациях.

§ 2. Рассмотрим прежде всего силлогистику одноместных неквантифицированных предикатов (обозначим через CS^1). Примем следующие обозначения и определения. Обозначения: 1) x, y, z (с индексами и без них) — переменные термины; 2) a, b, c (с индексами и без них) — термины; 3) A, B, C — высказывания; 4) X, Y, Z — формулы; 5) $\forall$ и $\exists$ — кванторы соответственно «все» («каждый из. . .») и «некоторые» («по крайней мере один из. . .»); 6) $\rightarrow$ — знак связи субъектов и предикатов (знак принадлежности свойств предметам, наличия свойств у предметов, включения предметов в классы и т. п.); 7) n — внутреннее отрицание (отрицание терминов); 8) N — внешнее отрицание (отрицание кванторов); 9) $\cdot$ — знак перечисления («и»); 10) $\vdash$ — знак следования («из. . . следует (выводится). . .»); 11) скобки — ограничители групп терминов, кванторных групп, частей высказываний, высказываний, формул и т. п. Прочие обозначения будут вводиться по мере изложения.

Термины: 1) переменные термины суть термины (латинские буквы x, y, z с индексами и без них суть термины); 2) если a термин, то na термин. Пусть $\alpha\forall a$ (и $\alpha\exists a$) означает, что перед $\forall$ (перед $\exists$) α раз записан знак N $(\alpha \geqslant 0)$. Высказывания: 1) $(\alpha\forall a)(a \rightarrow b)$ и $(\alpha\exists a)(a \rightarrow b)$ суть высказывания; 2) если A и B — высказывания, то $A \cdot B$ — высказывание. Очевидно, что $(\forall a)(a \rightarrow b)$,

$(\exists a)(a \to b)$, $(N\forall a)(a \to b)$ и $(N\exists a)(a \to b)$ суть высказывания. Термины a и b в $(\alpha\forall a)(a \to b)$ и $(\alpha\exists a)(a \to b)$ суть, соответственно, субъект и предикат.

Определение высказывания может быть дополнено в зависимости от состава знаков общей теории вывода. Так, если в последней фигурируют знаки $\sim$ (отрицание высказываний) и $\vee$ (неисключающая дизъюнкция), то возможно такое дополнение: если A — высказывание, то $\sim A$ — высказывание; если A и B — высказывания, то $A \vee B$ — высказывание. Вообще говоря, данное определение высказывания ориентировано на то, что нас будет интересовать специфика CS^1. А в последней каждый акт вывода делается из одного высказывания вида $(\alpha\forall a)(a \to b)$ или $(\alpha\exists a)(a \to b)$ или из двух таких высказываний, соединенных знаком $\cdot$. Если имеется более двух посылок, то рассуждение совершается как совокупность двух и более актов вывода. Если посылки соединены какими-то знаками, отличными от $\cdot$, то выводы из таких соединений высказываний совершаются по правилам общей теории вывода, а не по специфическим правилам силлогистики. Так что с учетом этих обстоятельств данное выше определение высказывания вполне достаточно. Если имеется определение высказывания в общей теории вывода, то достаточно дополнить его следующим: $(\alpha\forall a)(a \to b)$ и $(\alpha\exists a)(a \to b)$ суть высказывания в логической системе, получающейся в результате расширения общей теории вывода за счет присоединения силлогистики. Заметим также, что все вводимые здесь обозначения и определения нуждаются в дополнении слов «в силлогистике» («термины в силлогистике», «высказывания в силлогистике» и т. п.) или даже «в CS^i» (в частности, «в CS^1»). Но мы опускаем их, считая, что они предполагаются.

Символы $(\forall a)(a \to b)$, $(\forall a)(a \to nb)$, $(N\forall a)(a \to b)$, $(\exists a)(a \to b)$, $(\exists a)(a \to nb)$, $(N\exists a)(a \to b)$ можно интерпретировать («читать») различным образом, в частности так: «все a суть b» («все предметы a имеют свойство b», «все a включаются в класс b», «каждый a есть b» и т. п.), «все a суть не -b», «не все a суть b», «некоторые a суть b» («По крайней мере один из a есть b»), «Некоторые a суть не -b», «Нет a, которые суть b». Говоря «все a» («каждый a») или «некоторые a» («по крайней мере один a»), мы имеем в виду не множество знаков «a», а соответственно все или некоторые предметы (или свойства), обозначаемые термином a. Так что «все (некоторые) a» есть «все (некоторые) предметы, обозначаемые термином a».

При интерпретации рассматриваемых символов необходимо иметь в виду то, что один и тот же термин может быть субъектом в одном и предикатом в другом высказывании. В некоторых случаях это может быть связано с двойственной интерпретацией. Пусть, например, $(\forall a)(a \to b)$ интерпретируется как «все предметы a имеют свойство b». В таком случае $(\forall b)(b \to c)$ должно интерпретироваться как «все свойства b имеют свойство c», что представляется нелепостью. Поэтому приходится считать, что различение предметов и свойств имеет смысл лишь в отношении к высказываниям: термин обозначает предмет, если он субъект, и свойство, если он предикат. При этом $(\forall b)(b \to c)$ будет «нормально» интерпретироваться как «все предметы b (или все предметы, имеющие свойство b) имеют свойство c». Пожалуй, наиболее «чистой» и простой является интерпретация $(\forall a)(a \to b)$ и $(\exists a)(a \to b)$ как «все (некоторые) предметы, включающиеся в класс a, включаются в класс b» или как «все (некоторые) предметы, обозначаемые термином a, обозначаются термином b»; аналогично для остальных $(\alpha\forall a)(a \to b)$ и $(\alpha\exists a)(a \to b)$. Впрочем, не будем отвлекаться от главной темы и вернемся к обозначениям и определениям (вообще вопросы интерпретации для нас здесь играют лишь второстепенную и подсобную роль).

Формулы: если A и B суть высказывания, то $A \vdash B$ и $B \vdash A$ суть формулы. Определение формулы точно так же ориентировано на выделение специфического содержания силлогистики. Очевидно, что высказывание не есть формула, а формула не есть высказывание. Формулы интерпретируются как выводы одних высказываний из других.

Один из употребляемых символов входит (есть вхождение) в другой в следующих случаях (нам достаточно определить лишь некоторые вхождения): 1) a входит в a и в na; если a входит в b, а b — в c, то a входит в c; 2) A входит в A, $A \cdot B$, $B \cdot A$; если A входит в B, а B — в C, то A входит в C; 3) $\alpha\forall a$ входит в $(\alpha\forall a)(a \to b)$, $\alpha\exists a$ входит в $(\alpha\exists a)(a \to b)$; если $\alpha\forall a$ (и $\alpha\exists a$) входит в A, а A — в B, то $\alpha\forall a$ (и $\alpha\exists a$) входит в B; 4) a входит в $(\alpha\forall a)(a \to b)$, $(\alpha\exists a)(a \to b)$, $(\alpha\forall b)(b \to a)$ и $(\alpha\exists b)(b \to a)$;

если a входит в A, а A — в B, то a входит в B; если a входит в b, а b — в A, то a входит в A.

Символ $A[a, b]$ обозначает высказывание, полученное из A путем подстановки b на место a во всех местах, где a входит в A; $X[a, b]$ и $X[A, B]$ суть формулы, полученные в результате аналогичных подстановок соответственно b на место a и B на место A.

§ 3. Если дана общая теория вывода, то даны определения формулы и правильной (истинной, выводимой, доказуемой и т. п.) формулы общей теории вывода. Это может быть сделано, допустим, так: дан список основных правильных формул и список правил, посредством которых из основных правильных формул получаются производные.

Переход к силлогистике можно осуществить различными путями, в частности такими: 1) добавляем к определению формулы общей теории вывода то, что высказывания (и, возможно, формулы) силлогистики суть формулы в общей теории вывода, расширяемой за счет присоединения силлогистики; соглашаемся считать правильные формулы общей теории вывода правильными формулами силлогистики; 2) рассматриваем переменные высказывания и формулы общей теории вывода соответственно как высказывания и формулы силлогистики; списки основных правильных формул и правил получения из них новых правильных формул общей теории вывода излагаем вместе с прочими элементами теории силлогистических выводов. Эти пути ведут к одинаковым результатам с точки зрения объема охватываемых правил вывода, но второй путь в данной статье предпочтительнее (он, как нам кажется, проще).

Дадим теперь определение правильной формулы в CS^1. Правильные формулы в CS^1: 1) основные правильные формулы I; 2) основные правильные формулы II; 3) формулы, получаемые из формул I и II при помощи правил I*; 4) формулы, получаемые из формул I и II при помощи правила II*.

Основные правильные формулы I — это основные правильные формулы общей теории вывода, записанные при помощи символов, смысл которых разъяснен во втором параграфе. Мы будем использовать лишь следующие формулы I: 1) $A \cdot B \vdash A$; 2) $A \cdot B \vdash B$.

Основные правильные формулы II: 1) $(\forall x)(x \rightarrow y) \vdash$

$\vdash (\exists x)(x \to y)$; 2) $(\exists x)(x \to y) \vdash (\exists y)(y \to x)$; 3) $(\forall x)(x \to y) \vdash$ $\vdash (\forall ny)(ny \to nx)$; 4) $A \vdash A[nnx, x]$; 5) $A \vdash A[x, nnx]$; 6) $((\forall x)(x \to y)) \cdot ((\forall y)(y \to z)) \vdash (\forall x)(x \to z)$; 7) $((\exists x)(x \to y)) \cdot$ $\cdot ((\forall y)(y \to z)) \vdash (\exists x)(x \to z)$; 8) $(\forall x)(x \to y) \vdash$ $(N\exists x)(x \to ny)$; 9) $(\exists x)(x \to y) \vdash (N\forall x)(x \to ny)$; 10) $(N\forall x)(x \to y) \vdash (\exists x)(x \to ny)$; 11) $(N\exists x)(x \to y) \vdash (\forall x)$ $(x \to ny)$; 12) $(NN\alpha\forall x)(x \to y) \vdash (\alpha\forall x)(x \to y)$; 13) $(\alpha\forall x)$ $(x \to y) \vdash (NN\alpha\forall x)(x \to y)$; 14) $(NN\alpha\exists x)(x \to y) \vdash (\alpha\exists x)$ $(x \to y)$; 15) $(\alpha\exists x)(x \to y) \vdash (NN\alpha\exists x)(x \to y)$.

Правила I* суть правила получения правильных формул из формул I в общей теории вывода. Мы будем использовать, например, следующие: 1) если X правильная формула I, то $X[A, (\alpha\forall x)(x \to y)]$ есть правильная формула; 2) если X — правильная формула I, то $X[A, (\alpha\exists x)(x \to y)]$ есть правильная формула; 3) если $A \vdash B$ и $B \vdash C$ суть правильные формулы, то $A \vdash C$ — правильная формула; 4) если $A \vdash B$ и $A \vdash C$ — правильные формулы, то $A \vdash B \cdot C$ — правильная формула. Правило II*: если X — правильная формула, то $X[x, a]$ — правильная формула.

Нетрудно убедиться в том, что правильные модусы категорического силлогизма и «непосредственные» выводы суть правильные формулы согласно данному выше определению. Для доказательства этого достаточно приведенных выше формул I и II и правил I*. Тот факт, что X — правильная формула, будем обозначать символом $*(X)$. Возьмем, например, модус $((\forall a)(a \to nb)) \cdot$ $\cdot ((\forall c)(c \to b)) \vdash (\forall c)(c \to na)$. Согласно I1, I2, I*1 и I*2, имеем: $*(((\forall a)(a \to nb)) \cdot ((\forall c)(c \to b)) \vdash ((\forall a)(a \to nb)))$ и $*(((\forall a)(a \to nb)) \cdot ((\forall c)(c \to b)) \vdash ((\forall c)(c \to b)))$. Согласно II3 и II* имеем: $*((\forall a)(a \to nb) \vdash (\forall nnb)(nnb \to na))$. Согласно II4 и II* имеем: $*((\forall nnb)(nnb \to na) \vdash (\forall b)(b \to na))$. Согласно I*3 и полученным выше утверждениям имеем: $*(((\forall a)(a \to nb)) \cdot ((\forall c)(c \to b)) \vdash (\forall b)(b \to na))$. Согласно I*4 и полученным выше утверждениям, имеем: $*(((\forall a)$ $(a \to nb)) \cdot ((\forall c)$ $(c \to b)) \vdash ((\forall c)(c \to b)) \cdot ((\forall b)(b \to na)))$. Согласно II6 имеем: $*(((\forall c)(c \to b)) \cdot ((\forall b)(b \to na)) \vdash$ $\vdash (\forall c)(c \to na))$. Наконец, согласно I*3 имеем: $*(((\forall a)(a \to nb)) \cdot ((\forall c)(c \to b)) \vdash (\forall c)(c \to na))$. Другой пример: $*((N\exists x)(x \to y) \vdash (\forall x)(x \to ny))$, $*((\forall x)(x \to ny) \vdash$ $(\exists x)(x \to ny))$, $*((\exists x)(x \to ny) \vdash (N\forall x)(x \to nny))$, $*((N\forall x)(x \to nny) \vdash (N\forall x)(x \to y))$, $*((N\exists x)(x \to y) \vdash$ $\vdash (N\forall x)(x \to y))$.

Пусть K есть любой из кванторов $\forall$ и $\exists$, а KO означает следующее: если K есть один из $\forall$ и $\exists$, то KO есть другой из них; если KO есть один из $\forall$ и $\exists$, то K есть другой из них. Очевидно, что KOO есть K. Формально это можно выразить, приняв за правильные формулы $A \vdash A[\alpha\mathrm{KOO}x, \alpha\mathrm{K}x]$ и $A \vdash A[\alpha\mathrm{K}x, \alpha\mathrm{KOO}x]$. В таком случае вместо II6 и II7 достаточно принять формулу $((\mathrm{K}x)(x \to y)) \cdot ((\forall y)(y \to z)) \vdash (\mathrm{K}x)(x \to z)$, вместо II8, II9, II10 и II11 — формулу $(\alpha\mathrm{K}x)(x \to y) \vdash (N\alpha\mathrm{KO}x)(x \to ny)$ или формулу $(N\alpha\mathrm{K}x)(x \to y) \vdash (\alpha\mathrm{KO}x)(x \to ny)$, вместо II12 и II14 — формулу $(NN\alpha\mathrm{K}x)(x \to y) \vdash (\alpha\mathrm{K}x)(x \to y)$, вместо II13 и II15 — формулу $(\alpha\mathrm{K}x)(x \to y) \vdash (NN\alpha\mathrm{K}x)(x \to y)$. Но это лишь сокращение записи (которое, впрочем, имеет в ряде случаев серьезное значение).

Вывод согласно правильным формулам CS^1 есть силлогистический вывод. При этом мы имеем в виду вывод из высказываний с постоянными терминами, который можно представить как результат подстановки постоянных терминов на место переменных терминов в правильные формулы CS^1. Чтобы больше к этому не возвращаться, условимся силлогистическим выводом считать вывод согласно правильным формулам вообще CS^i (имеются в виду последующие обобщения CS^1). Впрочем, определение силлогистического вывода не имеет никакого значения для CS^i.

§ 4. Произведем обобщение CS^1 на случаи двух и более местных неквантифицированных предикатов. Логическую систему, получающуюся в результате этого обобщения (т. е. силлогистику многоместных неквантифицированных предикатов), обозначим через CS^2. Это обобщение можно осуществить различными способами. Мы приводим один из возможных.

Примем ряд дополнений к обозначениям и определениям, приведенным в § 2. Обозначения: 1) x, a, (a, b), (x, y), $(x^1, \ldots, x^n)$ и т. п., а также p, q, r — группы терминов; 2) K, K^1, K^2, ..., KO, $\mathrm{K}^1\mathrm{O}$, $\mathrm{K}^2\mathrm{O}$, ... — кванторы $\forall$ и $\exists$; при этом если K есть один из $\forall$ и $\exists$, то KO есть другой, и если KO есть один из $\forall$ и $\exists$, то K есть другой; аналогично отношение K^1 и $\mathrm{K}^1\mathrm{O}$, K^2 и $\mathrm{K}^2\mathrm{O}$ и т. д.; 3) $\alpha\mathrm{K}a$, $\alpha^1\mathrm{K}^1a^1$, ..., $\alpha^n\mathrm{K}^na^n$ и т. п., а также P, Q, P$\forall$, P$\exists$ — кванторные группы; 4) числа α, α^1, α^2, ..., α^n могут быть равными и неравными; 5) n может быть отрицанием групп терминов.

Термины (дополнение): если $a^1, \ldots, a^n$ — термины, то $(a^1, \ldots, a^n)$ — термин. Группы терминов: 1) если a — термин, то a — группа терминов; 2) если p и q — группы терминов, то (p, q) и (q, p) — группы терминов. Определение термина и группы терминов в известной мере параллельны. Этот параллелизм в принципе можно устранить. Но он правомерен как отражение возможности двух точек зрения на группы терминов. Возьмем, например, высказывания $(\alpha K \cdot (a^1, \ldots, a^n))\,((a^1, \ldots, a^n) \to b)$ и $((\alpha^1 K^1 a^1), \ldots, (\alpha^n K^n a^n))\,((a^1, \ldots, a^n) \to b)$. Первое есть высказывание с одноместным, а второе — с n-местным предикатом. Кроме того, превращение группы терминов из субъекта в предикат связано с тем, что эта группа начинает фигурировать как обозначение n-ки предметов, т. е. одного предмета, представляющего собой отношение n предметов, а не n различных предметов.

Кванторная группа: 1) $\alpha K a$ есть кванторная группа; 2) если P и Q — кванторные группы, то (PQ) и (QP) — кванторные группы. Кванторные группы с группой соответствующих терминов образуют субъектные группы.

Дополнение к определению вхождений: 1) p входит в p, (p, q) и (q, p); 2) a входит в a, (a, b), (b, a); 3) если a входит в p, а p — в q, то a входит в q; 4) $\alpha K a$ входит в $\alpha K a$; P входит в P, (PQ), (QP); если P входит в Q^1, а Q^1 — в Q^2, то P входит в Q^2; 5) если $\alpha K a$ входит в P, то a входит в P. Обращаем внимание на то, что $\alpha K a$ не есть вхождение в $N\alpha K a$.

Нормальная кванторная группа: 1) $\alpha K a$ нормальна относительно a; 2) если каждому термину a^i из множества терминов $a^1, \ldots, a^n$, входящих в p, соответствует одна и только одна кванторная группа $\alpha^i K^i a^i$ из множества групп $\alpha^1 K^1 a^1, \ldots, \alpha^n K^n a^n$, входящих в P, а каждой группе $\alpha^i K^i a^i$ из множества групп $\alpha^1 K^1 a^1, \ldots, \alpha^n K^n a^n$, входящих в P, соответствует один и только один термин a^i из множества терминов $a^1, \ldots, a^n$, входящих в p, то P нормальна относительно p. Если кванторная группа нормальна относительно p (или q), будем ее обозначать символом P (или Q). Если в P входят только кванторные группы вида $\forall a$, то будем изображать это символом P$\forall$; если же в P входят только кванторные группы вида $\exists a$, то будем изображать это символом P$\exists$.

Дополнение к определению высказывания: (P)$(p \to b)$ есть высказывание. В (P)$(p \to b)$ группа p есть субъектная группа. Дополнение к определению вхождений: 6) P входит в (P)$(p \to b)$; если P входит в Q; а Q — в A, то P входит в A; если P входит в A, а A — в B, то P входит в B; 7) если $\alpha\text{K}a$ входит в P, а P — в A, то $\alpha\text{K}a$ входит в A. Очевидно, что если одна из групп $\alpha\text{K}a$ и $N\alpha\text{K}a$ входит в (P)$(p \to b)$, то другая из этих групп не входит в это высказывание, поскольку P нормальна относительно p и $\alpha\text{K}a$ не входит в $N\alpha\text{K}a$. Очевидно также, что если в A входит a^i в субъектную группу, то в A обязательно входит $\alpha^i\text{K}^i a^i$, т. е. в субъектных группах, входящих в A, нет вхождений терминов, не связанных кванторами или их отрицаниями.

Символ вида $A[p, q]$ будет обозначать высказывание, образованное из A путем замены вхождения p на q везде, где p входит в A. Символ A[P, Q] обозначает высказывание, образованное из A путем замены P на Q везде, где P входит в A. Символ [P]A обозначает высказывание, в которое входит P. Символ PK обозначает кванторную группу, в которую входят только группы вида Ka (не входят группы, в которых перед K стоит N). Символ PKN^i обозначает группу, которая образуется из PK путем замены какого-либо (любого) сочетания вхождений из множества вхождений $\text{K}^1a^1, \ldots, \text{K}^na^n$ в PK на соответствующее сочетание кванторных групп из множества групп $N\text{K}^1a^1, \ldots, N\text{K}^na^n$ без изменения порядка записи групп (в соответствующих местах). Символ PKN^iO обозначает группу, образованную из PKN^i путем замены всех вхождений вида $N\text{K}^ia^i$ на соответствующие группы $N\text{K}^i\text{O}a^i$. Символ PKN^iON обозначает группу, образованную из PKN^i путем замены всех вхождений вида $N\text{K}^ia^i$ на соответствующие группы вида $\text{K}^i\text{O}a^i$.

Приведем пример: 1) $(\forall x \exists y \exists z)$ есть PK; 2) $(N\forall x \exists y \exists z)$, $(\forall x N\exists y \exists z)$, $(N\forall x N\exists y \exists z)$ и т. д. суть PKN^1, PKN^2, PKN^3 и т. д.; 3) $(N\exists x \exists y \exists z)$, $(\forall x N\forall y \exists z)$, $(N\exists x N\forall y \exists z)$ и т. д. суть PKN^1O, PKN^2O, PKN^3O и т. д.; 4) $(\exists x \exists y \exists z)$, $(\forall x \forall y \exists z)$, $(\exists x \forall y \exists z)$ и т. д. суть PKN^1ON, PKN^2ON, PKN^3ON и т. д. (нумерация произвольная).

§ 5. Прежде чем перейти к построению CS², сделаем одно замечание, относящееся к интерпретации (P)$(p \to b)$.

Под субъектами мы понимаем знаки, обозначающие то, о чем говорится в данном высказывании (обозначающие предметы, о которых идет речь в высказывании). То, что говорится о предметах, есть их свойства (если в высказывании один субъект) или отношения (если в высказывании два и более субъекта). То в высказываниях, что обозначает свойства и отношения предметов, суть предикаты. Если в отношении выделения субъектов дело обстоит обычно просто (не представляет труда выделить их зрительно или на слух), то выделение предикатов часто требует сложных абстракций. В частности, правомерен следующий путь абстрагирования предикатов в высказываниях с двумя и более субъектами: 1) «извлекаем» из высказывания A субъекты $a^1, \ldots, a^n$ и образуем из них группу терминов $(a^1, \ldots, a^n)$; причем записываем (или произносим) их в том порядке, в каком они фигурируют в высказывании — в каком они воспроизводятся при написании или произнесении высказывания; 2) в пустые места, образовавшиеся в высказывании, «вставляем» (например, вписываем) выражения «первый (по порядку написания) предмет», «второй предмет» и т. д.; то, что получается в результате этих операций, и есть предикат b высказывания A.

Теперь $(a^1, \ldots, a^n) \rightarrow b$ можно интерпретировать, например, так: 1) энка (n-ка) предметов, обозначаемых, соответственно, терминами $a^1, \ldots, a^n$ (или просто n-ка предметов $a^1, \ldots, a^n$) находится в отношении b; 2) n-ка предметов, обозначаемых терминами, соответственно, $a^1, \ldots, a^n$, включается в класс n-ок предметов таких, что b (излагается b как результат указанных выше операций). Вторая интерпретация удобнее. При этих интерпретациях n-ка предметов рассматривается на тех же основаниях, что и всякий предмет. Приобретает смысл внутреннее отрицание. Еще более удобной будет такая интерпретация: 3) n-ка предметов, включающаяся в класс n-ок предметов $a^1, \ldots, a^n$ (обозначаемых терминами $a^1, \ldots, a^n$), включается в класс n-ок предметов таких, что b. При этой интерпретации вполне естественными представляются те обобщения CS^1, которые мы ниже осуществим. Сказанное относится и к высказываниям с одноместными предикатами как к частному случаю. Кванторная группа $(\alpha^1 K^1 a^1, \ldots, \alpha^n K^n a^n)$ для каждого из предметов, обозначаемых терминами $a^1, \ldots, a^n$, указывает, верно $(a^1, \ldots, a^n) \to b$ в отношении некоторых, всех или не всех предметов этого класса, или нет таких предметов среди предметов этого класса, в отношении которых верно $(a^1, \ldots, a^n) \to b$.

§ 6. Система CS^2 будет отличаться от CS^1 списком формул II′, задаваемым вместо списка формул II, и изменением правил I* 1 и I* 2. Вместо последних принимается правило I* 1, 2: если X — правильная формула, то $X[A, (\mathrm{P})(p \to y)]$ есть правильная формула.

Основные правильные формулы II′ таковы:1) $A \vdash A[\forall x, \exists x]$; 2) $(\mathrm{P}\exists)(p \to y) \vdash (\exists y)(y \to p)$; 3) $(\mathrm{P}\forall)(p \to y) \vdash (\forall ny)(ny \to np)$; 4) $A \vdash A[nnx, x]$; 5) $A \vdash A[x, nnx]$; 6, 7) $((\mathrm{P})(p \to y)).[\forall y]((\mathrm{Q})(q \to z)) \vdash (((\mathrm{Q})(q \to z))[\forall y, \mathrm{P}])[y, p]$; 8, 9) $(\mathrm{PK})(p \to y) \vdash (\mathrm{PK}N'\mathrm{O})(p \to ny)$; 10, 11) $(\mathrm{PK}N')(p \to y) \vdash (\mathrm{PK}N'\mathrm{O}N)(p \to ny)$; 12) $A \vdash A[NN\alpha\mathrm{K}a, \alpha\mathrm{K}a]$; 13) $A \vdash A[\alpha\mathrm{K}a, NN\alpha\mathrm{K}a]$; 14) $A \vdash A[(\forall x, \forall y), (\forall y, \forall x)]$; 15) $A \vdash A[(\exists x\exists y), (\exists y\exists x)]$; 16) $A \vdash A[(\exists x\forall y), (\forall y\exists x)]$; 17) $A \vdash A[\alpha\mathrm{KOO}x, \alpha\mathrm{K}x]$; 18) $A \vdash A[\alpha\mathrm{K}x, \alpha\mathrm{KOO}x]$.

В формуле II′ 6, 7 $(((\mathrm{Q})(q \to z))[\forall y, \mathrm{P}])[y, p]$ есть высказывание, образованное из $(\mathrm{Q})(q \to z)$ в результате двух подстановок: 1) $\forall y$, которая входит в Q, заменяется на P; 2) y, который входит в q, заменяется на p. Символ p употребляется вместо $(x^1, \ldots, x^n)$ (формулы II′ должны быть записаны в знаках переменных терминов) исключительно для упрощения записи. Так, $(\mathrm{P}\exists)(p \to y) \vdash (\exists y)(y \to p)$ есть $(\mathrm{P}\exists)((x^1, \ldots, x^n) \to y) \vdash (\exists y)(y \to (x^1, \ldots, x^n))$. Аналогично для прочих формул. Аналогично для q. Возможны различные варианты списка II′, на чем мы останавливаться не будем.

Формулы II′ суть обобщения формул II. При $n=1$ отпадают пункты 14, 15 и 16 (или сводятся к повторению квантора, что касается пунктов 14 и 15); отпадают понятия группы терминов и кванторной группы как излишние; p превращается в x, $\mathrm{P}\forall$ — в $\forall x$, $\mathrm{P}\exists$ — в $\exists x$, P — в $\alpha\mathrm{K}x$.

Изложение силлогистики можно сразу начать с обобщенной системы (например, с CS^2), рассматривая CS^1 как частный случай. Но путь от CS^1 к CS^2 (и к более высоким обобщениям) удобнее с точки зрения понимания системы в связи с интерпретациями, с точки зрения отыскания таких интерпретаций и превращения формальных построений в теорию для некоторой предметной области. Этот путь удобнее с точки зрения обоснования логических систем CS^i: обоснование обобщенной силлогистики сводится к обоснованию CS^1 и некоторых дополнений к CS^1 (например, пунктов 14, 15 и 16 в II′). Обоснование же CS^1 проблемы не представляет.

§ 7. Вопрос об интерпретации CS^2 (и CS^1) важен, поскольку мы системы CS^i рассматриваем именно как средство описания силлогистических выводов, фактически осуществляющихся в рассуждениях и в принципе возможных и правомерных.

Правомерность II′1 усматривается из следующего: если для всех x верно A, то оно верно и для некоторых. Здесь затрагивается один очень важный вопрос, который (по всей вероятности) должен быть разработан где-то в начальных разделах логики: вопрос о таких трансформациях высказываний, которые не влияют на правила вывода, но облегчают осуществление выводов. Это, например, постановка и устранение логического ударения. В частности, правомерны такие утверждения: $[\alpha^i K^i a^i]\, A \vdash (\alpha^i K^i a^i)(a^i \to b)$ и $(\alpha^i K^i a^i)(a^i \to b) \vdash [\alpha^i K^i a^i]\, A$. Здесь $(\alpha^i K^i a^i)(a^i \to b)$ построено из A следующим образом: 1) из A извлекаем a^i и превращаем в субъект нового высказывания; 2) пустое место заполняем выражением «i-ый по порядку» (i зависит от места a^i в A), получая предикат b; 3) извлекаем кванторную группу $\alpha K^i a^i$ из A, отмечая как-то ее место в Р, и получаем рассматриваемое высказывание. Высказывание $[\alpha^i K^i a^i]\, A$ получается из последнего в обратном порядке. В общем эти трансформации означают изменения нашего внимания, наших точек зрения на высказывания.

Формулы II′4, 5, 12, 13 с точки зрения обоснования не отличаются от формул соответственно II 4, 5, 12, 14, 13, 15. Формулы II′17, 18 касаются исключительно сокращения записи и вообще могут не фигурировать в списке II′.

Для II′2, 3, 6, 7 делаем следующие допущения: 1) рассматриваем p как термин a односубъектного высказывания, обозначающий энку (n-ку) предметов; 2) если PK есть $P\forall$, то берем ее как $\forall a$; если PK есть $P\exists$, то берем ее как $\exists a$; если PK содержит как кванторы $\forall$, так и $\exists$, (то есть в PK входят группы с $\forall$ и $\exists$), то один раз PK берем как $P\forall$, а другой —

как $P\exists$. Формула II′2 принимает при этом вид $(\exists a)(a \rightarrow y) \vdash (\exists y)(y \rightarrow a)$, формула II′3 — вид $(\forall a)(a \rightarrow y) \vdash$ $\vdash (\forall ny)(ny \rightarrow na)$. Высказывание $[\forall y](Q(q \rightarrow z))$ берется как высказывание $(\forall y)(y \rightarrow z^*)$, отличающееся от первого простановкой логического ударения на y («Все y таковы, что ...»). В таком случае II′6, 7 принимает вид $((\forall a)(a \rightarrow y)) \cdot ((\forall y)(y \rightarrow z^*)) \vdash ((\forall a)(a \rightarrow z^*))$ или $((\exists a)(a \rightarrow y)) \cdot ((\forall y)(y \rightarrow z^*)) \vdash ((\exists a)(a \rightarrow z^*))$.

Для II′8, 9, 10, 11 принимаем такие допущения: 1) если PК есть $P\forall$, то PК есть $\forall a$, PК$N^{\text{ʻ}}$ есть $N\forall a$, PК$N^{\text{ʻ}}O$ есть $N\exists a$, PК$N^{\text{ʻ}}ON$ есть $\exists a$; 2) если PК есть $P\exists$, то PК есть $\exists a$, PК$N^{\text{ʻ}}$ есть $N\exists a$, PК$N^{\text{ʻ}}O$ есть $N\forall a$, PК$N^{\text{ʻ}}ON$ есть $\forall a$; 3) если PК содержит $\forall$ и $\exists$, то берется тот и другой вариант. Формула II′8, 9 принимает вид $(\text{К}a)(a \rightarrow y) \vdash (N\text{К}Oa)(a \rightarrow ny)$, формула II′10, 11 — вид $(N\text{К}a)(a \rightarrow y) \vdash (\text{К}Oa)(a \rightarrow ny)$.

Формулы II 8—II 11 можно рассматривать как определения $(N\forall a)(a \rightarrow b). =Df. \ (\exists a)(a \rightarrow nb)$ и т. п. Часто так и делают. Это можно отнести и к формулам II′8, 9 и II′10, 11, устраняя тем самым необходимость обоснования их.

Почему приняты II′14, II′15 и II′16 и не принята $A \vdash A[(\forall x \exists y), (\exists y \forall x)]$, ясно из тех же соображений, на основе которых в классическом исчислении предикатов исключается подобная формула. Возьмем простейший случай, а именно $(\text{К}^1 x \text{К}^2 y)((x, y) \rightarrow z)$, и будем его интерпретировать так: 1) $(\forall x \forall y)((x, y) \rightarrow z)$ — каждый x находится в отношении z с каждым y; 2) $(\exists x \exists y)((x, y) \rightarrow z)$ — по крайней мере один из x находится в отношении z по крайней мере с одним из y; 3) $(\exists x \forall y)((x, y) \rightarrow z)$ — по крайней мере один из x находится в отношении z с каждым y; 4) $(\forall x \exists y)((x, y) \rightarrow z)$ — каждый x находится в отношении z по крайней мере с одним из y. Пусть, например, x есть множество точек на плоскости, а y — другое множество точек на этой же плоскости; отношение z означает, что точка из множества x соединена линией с точкой из множества y. Из этой интерпретации легко убедиться в том, что в первых трех случаях допустима перестановка кванторов, в четвертом — нет: из того факта, что каждая точка x соединена линией хотя бы с одной точкой y, никак еще не следует, что имеется точка y, соединенная с каждой точкой x. Эти соображения сохраняют убедительность для любых

(РК) $(p \to y)$: каждое такое высказывание можно представить в форме $[\mathrm{K}^i x^i \mathrm{K}^k x^k] A$, где $(\mathrm{K}^i x^i \mathrm{K}^k x^k)$ входит в РК, а A есть данное высказывание при том условии, что логическое ударение в нем сделано на отношение предметов, обозначаемых терминами x^i и x^k.

Высказывания с двумя и более субъектами (с многоместными предикатами) суть высказывания об отношениях предметов, фиксируемых (обозначаемых) этими субъектами. Исключение формулы $A \vdash A[(\forall x \exists y), (\exists y \forall x)]$ из числа правильных формул есть показатель упорядоченности отношений, в данном случае — показатель того, что последовательность выбора предметов (их мысленного фиксирования, обозначения и т. п. при построении A) может оказаться важной. Формулы со знаком N не устраняют этой упорядоченности.

Исключительно соображения гносеологической интерпретации (или, можно сказать, семантические соображения) заставляют принимать формулы II′14, II′15, II′16 и отвергать $A \vdash A[(\forall x \exists y); (\exists y \forall x)]$. Это хороший пример для иллюстрации идей, изложенных в [3]. Это касается и прочих формул II′.

Формулы II′17 и II′18 можно в CS^2 не включать, полагая, что если КО есть один из $\forall$ и $\exists$, то КОО есть другой из них.

§ 8. Введем знак M, который можно интерпретировать, допустим, так: $M(x \to y)$ — x не включается в класс y (x не имеет свойства y); $M((x^1, \ldots, x^n) \to y)$ — n-ка предметов, обозначаемых знаками $x^1, \ldots, x^n$, не находится в отношении y. Введем также знак $\sim$, являющийся отрицанием высказываний в общей теории вывода. К определению высказывания можно сделать дополнение: 1) $(\alpha \mathrm{K} a) M(a \to b)$ есть высказывание; 2) $(\mathrm{P}) M(p \to b)$ есть высказывание; 3) если A — высказывание, то $\sim A$ — высказывание. Первый пункт имеет смысл для CS^1. В CS^2 достаточно второго пункта.

В CS^1 имеет место следующее: 1) $\sim ((\alpha \mathrm{K} a)(a \to b)) \vdash$ $\vdash (N \alpha \mathrm{K} a)(a \to b)$; 2) $(N \alpha \mathrm{K} a)(a \to b) \vdash \sim ((\alpha \mathrm{K} a(a \to b)$; 3) $(\alpha \mathrm{K} a) M(a \to b) \vdash (\alpha \mathrm{K} a)(a \to nb)$; 4) $(\alpha \mathrm{K} a)(a \to b) \vdash$ $\vdash (\alpha \mathrm{K} a) M(a \to nb)$. В другой форме: 1) $\sim ((\alpha \mathrm{K} a)(a \to b)). =$ $= Df. (N \alpha \mathrm{K} a)(a \to b)$; 2) $(\alpha \mathrm{K} a) M(a \to b). = Df. (\alpha \mathrm{K} a)(a \to nb)$. Такие соотношения имеют силу потому, что в $(\alpha \mathrm{K} a)(a \to b)$ одна кванторная группа и не квантифицирован предикат. Если знаки $\sim$ и M фигурируют в системе CS^1, то указанные формулы 1—4 должны быть присоединены к II (поскольку мы не пользуемся определениями 1 и 2). В CS^2 сохраняются формулы 3 и 4; 3) (P) $M(p \rightarrow b) \vdash$ $\vdash$ (P) $(p \rightarrow nb)$; 4) (P) $(p \rightarrow b) \vdash$ (P) $M(p \rightarrow nb)$. Поэтому вводить знак M для CS^1 и CS^2 не имеет смысла (M сводится к n). Знак $\sim$ не имеет смысла вводить в CS^1, поскольку он сводится к N. Но в CS^2 такого простого сведения не будет.

Введем знак $\vee$ — знак нестрогой дизъюнкции. Если этот знак вводится в общей теории вывода, то требуется дополнить определение высказывания (если A и B — высказывания, то $A \vee B$ — высказывание; A входит в $A \vee B$ и $B \vee A$) и указать формулы I, определяющие свойства $\vee$ (например, $A \vdash A \vee B$, $B \vdash A \vee B$, $(A \vee B) \cdot \sim A \vdash B$ и т. п.).

Пусть A^1 есть (PK)$(p \rightarrow y)$, а $A^2, \ldots, A^m$ — все возможные (PKN^i)$(p \rightarrow y)$. Пусть множество высказываний $A^1, A^2, \ldots, A^m$ разбито на два непустых непересекающихся подмножества. Из высказываний одного из этих подмножеств строим высказывание C^* таким путем: 1) перед каждым высказыванием этого подмножества высказываний пишем знак $\sim$; 2) соединяем все полученные при этом высказывания знаком $\cdot$ (в общем C^* есть конъюнкция отрицаний $\sim$ высказываний этого подмножества). Из высказываний второго из этих подмножеств строим высказывание C^{**}, соединяя все высказывания этого второго подмножества знаком $\vee$. Знак $\sim$ можно теперь определить формулами $C^* \vdash C^{**}$ и $C^{**} \vdash C^*$ или дефиницией $C^* . = Df. C^{**}$. В частности, $\sim A^1 \vdash A^2 \vee \ldots \vee A^m$, $\sim A^2 \vdash A^1 \vee \ldots \vee A^m$, $\sim A^1 \cdot \sim A^2 \vdash A^3 \vee \ldots \vee A^m$, $\sim A^1 \cdot \sim A^2 \cdot \ldots \cdot \sim A^{m-1} \vdash A^m$, $A^2 \vee \ldots \vee A^m \vdash \sim A^1$, $A^1 \vee \ldots \vee A^m \vdash \sim A^2$ и т. д.

Формулы $C^* \vdash C^{**}$ и $C^{**} \vdash C^*$ должны быть дополнены к II′ как формулы, позволяющие использовать отрицание общей теории вывода в обобщенной силлогистике (их номера — II′19 и II′20). Дополнения, связанные со знаком M, приобретают смысл лишь в случае квантификации предикатов.

§ 9. Пусть основные правильные формулы I суть исключительно $A \cdot B \vdash A$ и $A \cdot B \vdash B$. Пусть C есть высказывание в смысле § 2 и характеризуется следующим свойством: если в C входит αK$a(a \rightarrow b)$, то в C не входит $N\alpha$K$a(a \rightarrow b)$ и не входит αK$Oa(a \rightarrow nb)$. Формулы

$C \vdash (\mathrm{K}a\,(a \to b)) \cdot (N\mathrm{K}a\,(a \to b))$ и $C \vdash (\mathrm{K}a\,(a \to b)) \cdot (\mathrm{K}Oa(a \to \to nb))$ не являются правильными в CS^1. Идея доказательства этого положения такова: среди формул II нет двух таких, что $C \vdash \mathrm{K}a\,(a \to b)$ и $C \vdash N\mathrm{K}a\,(a \to b)$, а правила I* и II* исключают возможность получить такую пару (если одна из этих формул правильная, то I* и II* не дают права считать правильной и вторую). В этом смысле CS^1 непротиворечива.

Аналогично для CS^2. Пусть C есть высказывание, обладающее следующим свойством: если в C входит $P\mathrm{K}\,(p \to b)$, то в C не входят $P\mathrm{K}N^i(p \to b)$ и $P\mathrm{K}N^iON(p \to nb)$; если в C входит $P\mathrm{K}N^i\,(p \to b)$, то в C не входят $P\mathrm{K}\,(p \to b)$ и $P\mathrm{K}N^iO(p \to nb)$. В CS^2 не являются правильными формулы $C \vdash (P\mathrm{K}\,(p \to b)) \cdot (P\mathrm{K}N^i\,(p \to b))$, $C \vdash (P\mathrm{K}\,(p \to b)) \cdot \cdot (P\mathrm{K}N^iON\,(p \to nb))$, $C \vdash (P\mathrm{K}N^i\,(p \to b) \cdot (P\mathrm{K}N^iO\,(p \to nb))$. Основания те же, что и для CS^1.

Если введены знаки $\vee$ и $\sim$ и приняты формулы $A \vdash A \vee B$ и $B \vdash A \vee B$, то в CS^1 и CS^2 не будет правильной формула $C \vdash A \cdot \sim A$ (отношение $\sim$ и знаков CS^i предполагается данным.).

§ 10. В CS^2 кванторная группа P в высказываниях (P) $(p \to y)$ всегда нормальна относительно p: в CS^2 нет формул со свободными субъектными переменными. Этому свойству CS^2 можно подыскать подходящую интерпретацию. В частности, это могут быть такие соображения.

Если некоторые высказывания (предложения) содержат субъекты, не связанные кванторами, то в фактически встречающихся рассуждениях (выводах) эти высказывания ведут себя как высказывания, в которых эти субъекты связаны квантором $\forall$. Для индивидуальных терминов это очевидно, поскольку классы обозначаемых ими предметов состоят из одного элемента каждый. Что касается общих терминов, то употребление квантора $\forall$ есть лишь одна из возможных форм записи, в которой удобнее выражать некоторые логические свойства высказываний (например, высказывание «человек смертен» по содержанию тождественно высказыванию «все люди смертны»).

В общем запись $x \to y$ тождественна записи $(\forall x)\,(x \to y)$. Но так как приходится употреблять квантор $\exists$ и отрицание N, а также учитывать упорядоченность терминов в случае многоместных предикатов, то должен быть введен какой-то знак для обозначения того, что некоторое высказывание верно в отношении всех (или не всех) предметов некоторого класса. «Навешивание» квантора $\forall$, которое можно записать утверждением «если $x \to y$, то $(\forall x)(x \to y)$», есть лишь переход к стандартной, принятой в силлогистике форме записи общих высказываний, а не правильная формула в силлогистике и не правило получения правильных формул из основных.

Если не известно, какое из высказываний $[\mathrm{K}a]A$, $A[\mathrm{K}a, N\mathrm{K}a]$, $A[\mathrm{K}a, \mathrm{KO}a]$ и $A[\mathrm{K}a, N\mathrm{KO}a]$ верно, то будет верно $[\mathrm{K}a]A \vee A[\mathrm{K}a, N\mathrm{K}a] \vee A[\mathrm{K}a, \mathrm{KO}a] \vee A[\mathrm{K}a, N\mathrm{KO}a]$ (если значение истинности A зависит только от того, какой из знаков K, NK, KO и NKO стоит перед a). Эта дизъюнкция подходит также для описания случая, когда безразлично, какое из указанных четырех высказываний верно.

До сих пор мы рассматривали силлогистические выводы из высказываний с неквантифицированными предикатами. Для этого случая имеется такая интерпретация. Предикат y в $(\mathrm{P})(p \to y)$ не квантифицируется потому, что имеется в виду один класс y, в который включается n-ка предметов, обозначаемая группой p (имеется в виду одно отношение, в котором находятся предметы, обозначаемые группой p; в случае одноместных предикатов имеется в виду одно свойство y или один класс y). Класс y (свойство y, отношение y) не рассматривается с точки зрения возможных видовых различий.

Но возможна (работы Гамильтона и Де Моргана) квантификация предиката, а именно: когда y есть класс классов, свойств, отношений. Например, «каждый x имеет по крайней мере одно из свойств y», «некоторые x включаются во все классы y», «все x имеют все свойства y», «некоторые предметы, включающиеся в класс x, включаются в некоторые из классов y» и т. п. Сказанное относится и к высказываниям с многоместными предикатами.

Высказывания с квантифицируемыми предикатами можно свести к форме $(\mathrm{P}a\mathrm{K}y)((p, y) \to R)$, где R есть неквантифицируемый логический предикат: «второй (по порядку обозначения) есть отношение первых», «второй есть свойство первого» (для одноместных y), «n-ка первых включается в класс n-ок предметов таких, что y» и т. п. Но это не ликвидирует специфических последствий квантификации y, излишне усложняя систему записи (в частности, R дублирует $\rightarrow$).

Возьмем высказывание «все x не включаются в некоторые из классов y» («все x не имеют некоторых из свойств y»). Из него не следует, что все x включаются в класс не-y (что все x вообще не включаются в y). Этот пример говорит о том, что знак M в случаях с квантифицируемыми предикатами не сводится к внутреннему отрицанию таким же простым образом, как в CS^1 и CS^2. Так что имеет смысл ввести знак M в силлогистику, в которой квантифицируются и предикаты.

Примем следующее дополнение к определению высказывания: $(\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}a)\beta(p \rightarrow a)$ и $(\alpha\mathrm{K}a, \mathrm{P})\beta(p \rightarrow a)$ суть высказывания, где $\beta(p \rightarrow a)$ означает, что знак M записан β раз $(\beta \geqslant 0)$ перед $(p \rightarrow a)$.

«Навешивание» кванторов на y можно записать такими утверждениями: 1) если $(\mathrm{P})(p \rightarrow y)$, то $(\mathrm{P}, \exists y)(p \rightarrow y)$; 2) если $(\mathrm{P})M(p \rightarrow y)$, то $(\mathrm{P}, \forall y)M(p \rightarrow y)$. Последние ясны из следующей, например, интерпретации: 1) если p включается в класс y, то p включается по крайней мере в один из классов y (в некоторые y); 2) если p не включается в y, то p не включается во все классы y. Важно здесь опять-таки то, что «навешивание» квантора не есть формула и правило в силлогистике.

Мы будем рассматривать только такой случай, когда кванторная группа, нормальная относительно предиката a, имеет вид $\alpha\mathrm{K}a$. Абстрактно мыслимы, конечно, случаи иного рода, когда кванторная группа, нормальная относительно предиката, имеет вид $(\alpha^1\mathrm{K}^1a^1, \ldots, \alpha^n\mathrm{K}^na^n)$. Однако имеются соображения, согласно которым подыскание интерпретации для них из области реальных предложений и операций с ними оказывается крайне затруднительным (если это вообще возможно).

В односубъектном высказывании предикат обозначает свойство или класс и выражается одним термином. В многосубъектных высказаниях предикат обозначает отношение предметов или класс таких отношений. Это отношение может быть выделено лишь благодаря абстракции, при которой из высказывания исключаются термины-субъекты и на место их ставятся выражения «первый по порядку предмет», «второй предмет» и т. п.

Так что каким бы сложным ни был предикат, он всегда есть один термин, а не группа из двух и более терминов. Если $(a^1, \ldots, a^n)$ становится предикатом, то и в этом случае будет предикат из одного термина $(a^1, \ldots, a^n)$: $y \to (a^1, \ldots, a^n)$ интерпретируется как «n-ка предметов таких, что „y“ включается в класс n-ок предметов, обозначаемых $(a^1, \ldots, a^n)$» (но не в классы $a^1, \ldots, a^n$). В общем n-ка предметов включается в класс n-ок же, а не $(n+\alpha)$-ок или $(n-\alpha)$-ок, где $\alpha \geqslant 1$.

§ 11. Силлогистику одноместных квантифицированных предикатов обозначим символом CS^3. Эта система отличается от CS^1 списком основных правильных формул II^0 (вместо II) и правилом II^* 1, 2. Последнее формулируется так: если X есть правильная формула, то $X[A, (\alpha^1 K^1 x \alpha^2 K^2 y)\beta(x \to y)]$ и $X[A, (\alpha^2 K^2 y \alpha^1 K^1 x)\beta(x \to y)]$ суть правильные формулы. Дополнения к определениям: $(\alpha^1 K^1 x \alpha^2 K^2 y)\beta(x \to y)$ и $(\alpha^2 K^2 y \alpha^1 K^1 x)\beta(x \to y)$ суть высказывания; $\beta(x \to y)$ входит в $(\alpha^1 K^1 x \alpha^2 K^2 y)\beta(x \to y)$ и в $(\alpha^2 K^2 y \alpha^1 K^1 x)\beta(x \to y)$.

Основные правильные формулы II^0: 1) $(\forall x K y)\beta(x \to y) \vdash (\exists x K y)\beta(x \to y)$; $(K y \forall x)\beta(x \to y) \vdash (K y \exists x)\beta(x \to y)$; 2) $(K x \forall y)\beta(x \to y) \vdash (K x \exists y)\beta(x \to y)$; $(\forall y K x)\beta(x \to y) \vdash (\exists y K x)\beta(x \to y)$; 3) $(\exists x \exists y)(x \to y) \vdash (\exists y \exists x)(y \to x)$; 4) $(\forall x \exists y)(x \to y) \vdash (\forall ny \exists nx)(ny \to nx)$; 5) $((K^1 x \exists y)(x \to y)) \cdot ((\forall y K^2 z)(y \to z)) \vdash (K^1 x K^2 z)(x \to z)$; $((K^1 x \forall y)(x \to y)) \cdot ((\exists y K^2 z)(y \to z)) \vdash (K^1 x K^2 z)(x \to z)$; $((\exists y K^1 x)(x \to y)) \cdot ((K^2 z \forall y)(y \to z)) \vdash (K^2 z K^1 x)(x \to z)$; $((\forall y K^1 x)(x \to y)) \cdot ((K^2 z \exists y)(y \to z)) \vdash (K^2 z K^1 x)(x \to z)$; 6) $(K x \exists y)(x \to y) \vdash (K x \forall ny) M (x \to ny)$; $(\exists y K x)(x \to y) \vdash (\forall ny K x) M (x \to ny))$; 7) $(K x \forall y) M (x \to y) \vdash (K x \exists ny)(x \to ny)$; $(\forall y K x) M (x \to y) \vdash (\exists ny K x)(x \to ny)$; 8) $(\forall x \forall y)\beta(x \to y) \vdash (\forall y \forall x)\beta(x \to y)$; $(\forall y \forall x)\beta(x \to y) \vdash (\forall x \forall y)\beta(x \to y)$; 9) $(\exists x \exists y)\beta(x \to y) \vdash (\exists y \exists x)\beta(x \to y)$; $(\exists y \exists x)\beta(x \to y) \vdash (\exists x \exists y)\beta(x \to y)$; 10) $(\alpha K^1 x K^2 y)\beta(x \to y) \vdash (N \alpha K^1 O x K^2 O y) M\beta(x \to y)$; 11) $(\alpha K^2 y K^1 x)\beta(x \to y) \vdash (N \alpha K^2 O y K^1 O x) M\beta(x \to y)$; 12) $(\alpha K^1 x N K^2 y)\beta(x \to y) \vdash (\alpha K^1 x K^2 O y) M\beta(x \to y)$; 13) $(\alpha K^2 y N K^1 x)\beta(x \to y) \vdash (\alpha K^2 y K^1 O y) M\beta(x \to y)$; 14) $A \vdash A[nnx, x]$; $A \vdash A[x, nnx]$; 15) $A \vdash A[NN\alpha K x, \alpha K x]$; $A \vdash A[\alpha K x, NN\alpha K x]$; 16) $A \vdash A[MM\beta(x \to y), \beta(x \to y)]$; $A \vdash A[\beta(x \to y), MM\beta(x \to y)]$; 17) $A \vdash A[\alpha K O O x, \alpha K x]$; $A \vdash A[\alpha K x, \alpha K O O x]$.

Формулы II^0 5 можно записать также в таком (более общем) виде: $((K^1 x K y)(x \to y))((K O y K^2 z)(y \to z)) \vdash$

$\vdash (\mathrm{K}^1 x \mathrm{K}^2 z)(x \to z)$; $((\mathrm{K}y\mathrm{K}^1 x)(x \to y))((\mathrm{K}^2 z \mathrm{KO}y)(y \to z)) \vdash$ $\vdash (\mathrm{K}^2 z \mathrm{K}^1 x)(x \to z)$.

§ 11 Силлогистику многоместных квантифицированных предикатов обозначим через CS^4. Она отличается от CS^2 списком основных правильных формул II'^0 (вместо II') и правилом I* 1, 2. Последнее формулируется так: если X есть правильная формула, то $X[A, (\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y)]$ и $X[A, (\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{P})\beta(p \to y)]$ суть правильные формулы. Дополнения к определениям: $(\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y)$ и $(\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{P})\beta(p \to y)$ суть высказывания; $\beta(p \to y)$ входит в $(\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y)$ и в $(\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{P})\beta(p \to y)$. Символом PKO будем обозначать кванторную группу, которая образуется из PK путем замены по крайней мере одного из вхождений $\mathrm{K}^i x^i$ соответствующей группой $\mathrm{K}^i\mathrm{O}x^i$. Например, если PK есть $(\forall x^1 \exists x^2)$, то PKO есть любая из групп $(\exists x^1 \exists x^2)$, $(\forall x^1 \forall x^2)$, $(\exists x^1 \forall x^2)$.

Основные правильные формулы II'^0: 1) $[\forall\alpha]((\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y)) \vdash ((\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y))[\forall x, \exists x]$; $[\forall x x]((\mathrm{K}y, \mathrm{P})\beta(p \to y)) \vdash ((\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{P})\beta(p \to y))[\forall x, \exists x]$; 2) $(\mathrm{P}, \forall y)\beta(p \to y) \vdash$ $\vdash (\mathrm{P}, \exists y)\beta(p \to y)$; $(\forall y, \mathrm{P})\beta(p \to y) \vdash (\exists y, \mathrm{P})\beta(p \to y)$; 3) $(\mathrm{P}\exists, \exists y)(p \to y) \vdash (\exists y, \exists p)(y \to p)$; 4) $(\mathrm{P}\forall, \exists y)(p \to y) \vdash$ $\vdash (\forall n y, \exists n p)(n y \to n p)$; 5) $((\mathrm{PK}, \mathrm{K}^1 y)(p \to y)) \cdot$ $\cdot [\mathrm{K}^1\mathrm{O}y]((\mathrm{Q}, \mathrm{K}^2 z)(q \to z)) \vdash (((\mathrm{Q}, \mathrm{K}^2 z)(q \to z))[\mathrm{K}^1\mathrm{O}y, \mathrm{PK}])[y, p]$; $((\mathrm{K}^1 y, \mathrm{PK})(p \to y)) \cdot [\mathrm{K}^1\mathrm{O}y]((\mathrm{K}^2 z, \mathrm{Q})(q \to z)) \vdash$ $\vdash ((\mathrm{K}^2 z, \mathrm{Q})(q \to z))[\mathrm{K}^1\mathrm{O}y, \mathrm{PK}])[y, p]$; 6) $(\mathrm{PK}, \exists y)(p \to y) \vdash (\mathrm{PK}, \forall n y) M (p \to n y)$; 7) $(\mathrm{PK}, \forall y) M (p \to y) \vdash (\mathrm{PK}, \exists n y)(p \to n y)$; 8) $(\mathrm{P}\forall, \forall y)\beta(p \to y) \vdash (\forall y, \mathrm{P}\forall)\beta(p \to y)$; $(\forall y, \mathrm{P}\forall)\beta(p \to y) \vdash$ $\vdash (\mathrm{P}\forall, \forall y)\beta(p \to y)$; 9) $(\mathrm{P}\exists, \exists y)\beta(p \to y) \vdash (\exists y, \mathrm{P}\exists)\beta(p \to y)$; $(\exists y, \mathrm{P}\exists)\beta(p \to y) \vdash (\mathrm{P}\exists, \exists y)\beta(p \to y)$; 10) $(\mathrm{PK}, \mathrm{K}y)\beta(p \to y) \vdash$ $\vdash (\mathrm{PK}N^i\mathrm{O}, \mathrm{KO}y) M\beta(p \to y)$; $(\mathrm{PK}N^i, \mathrm{K}y)\beta(p \to y) \vdash$ $\vdash (\mathrm{PK}N^i\mathrm{O}N, \mathrm{KO}y) M\beta(p \to y)$; 11) $(\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{PK})\beta(p \to y) \vdash$ $\vdash (N\alpha\mathrm{KO}y, \mathrm{PKO}) M\beta(p \to y)$; 12) $(\mathrm{PK}, N\mathrm{K}y)\beta(p \to y) \vdash$ $\vdash (\mathrm{PK}, \mathrm{KO}y) M\beta(p \to y)$; $(\mathrm{PK}N^i, N\mathrm{K}y)\beta(p \to y) \vdash (\mathrm{PK}N^i, \mathrm{KO}y) M\beta(p \to y)$; 13) $(\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{PK}N^i)\beta(p \to y) \vdash (\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{PK}N^i\mathrm{O}N) M\beta(p \to y)$; 14) $A \vdash A[nnx, x]$; $A \vdash A[x, nnx]$; 15) $A \vdash A[NN\alpha\mathrm{K}x, \alpha\mathrm{K}x]$; $A \vdash A[\alpha\mathrm{K}x, NN\alpha\mathrm{K}x]$; 16) $A \vdash$ $\vdash A[MM\beta(p \to y), \beta(p \to y)]$; $A \vdash A[\beta(p \to y), MM\beta(p \to y)]$; 17) $A \vdash A[\alpha\mathrm{KOO}x, \alpha\mathrm{K}x]$; $A \vdash A[\alpha\mathrm{K}x, \alpha\mathrm{KOO}x]$; 18) $(\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y) \vdash ((\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y))[(\forall x^i \forall x^k), (\forall x^k \forall x^i)]$; $(\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{P})\beta(p \to y) \vdash ((\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{P})\beta(p \to y))[(\forall x^i \forall x^k), (\forall x^k \forall x^i)]$; 19) $(\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y) \vdash ((\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to$ $\to y))[(\exists x^i \exists x^k), (\exists x^k \exists x^i)]$; $(\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{P})\beta(p \to y) \vdash (\alpha\mathrm{K}y, \mathrm{P}\beta(p \to y))[(\exists x^i \exists x^k), (\exists x^k \exists x^i)]$; 20) $(\mathrm{P}, \alpha\mathrm{K}y)\beta(p \to y) \vdash$

$\vdash ((P, \alpha K y)\,\beta\,(p \to y))\,[(\exists x^i \forall x^k), (\forall x^k \exists x^i)]$; $(\alpha K y, P)\,\beta\,(p \to y) \vdash$
$\vdash ((\alpha K y,\ P)\,\beta\,(p \to y))\,[(\exists x^i \forall x^k),\ (\forall x^k \exists x^i)]$.

Пусть A есть $(K^1 a,\ K^2 b)\,(a \to b)$ или $(K^2 b,\ K^1 a)\,(a \to b)$, а A^* — любое из $A\,[K^1 a,\ NK^1 a]$, $A\,[K^2 b,\ NK^2 b]$, $(A\,[K^1 a,\ NK^1 a])\,[K^2 b,\ NK^2 b]$, $A\,[(a \to b),\ M\,(a \to b)]$. Пусть B таково, что если в B входит одно из A и A^*, то не входит другое из них. В CS^3 не является правильной формула $B \vdash A \cdot A^*$, и в этом смысле CS^3 непротиворечива. Идея доказательства та же, что и выше: среди формул II^0 нет пары $B \vdash A$ и $B \vdash A^*$, а без этого условия правила вывода не дают возможности получить $B \vdash A \cdot A^*$. Непротиворечивость I предполагается. Аналогично для CS^4. Только для последней A есть $(PK,\ Kb)\,(p \to b)$ или $(Kb,\ PK)\,(p \to b)$, а A^* — любое из $A\,[PK,\ PKN^i]$, $A\,[Kb,\ NKb]$, $(A\,[PK,\ PKN^i])\,[Kb\,NKb]$, $A\,[(p \to b),\ M\,(p \to b)]$.

Пусть C^* есть конъюкция (соединение знаком $\cdot$) непустого подмножества отрицаний (имеется в виду $\sim$) высказываний из множества высказываний A и A^* (за исключением последнего из A^*), а C^{**} — дизъюнкция (соединение знаком $\vee$) непустого подмножества высказываний из множества этих высказываний; причем эти два подмножества дополняют друг друга. В таком случае знак $\sim$ будет определен формулами $C^* \vdash C^{**}$ и $C^{**} \vdash C^*$, присоединяемыми к числу правильных формул CS^3 и CS^4, или дефиницией $C^* \cdot = Df \cdot C^{**}$. Можно также определить $\sim$ через M. Одним словом, отрицание $\sim$ не является необходимым для силлогистики. Но оно может быть полезным как средство сокращения и упрощения записи сложных формул.

§ 12. Для того, чтобы было удобнее интерпретировать формулы, можно условиться относительно следующей модификации записи: формулы $(P,\ \alpha K y)\,\beta\,(p \to y)$ записывать так, как делалось выше, а формулы $(\alpha K y, P)\,\beta\,(p \to y)$ записывать в виде $(\alpha K y,\ P)\,(y \leftarrow p)$.

Форму записи высказываний вообще можно упростить следующим образом: 1) вместо $(P,\ \alpha K y)\,\alpha\,(p \to y)$ писать $\beta\,(P \to \alpha K y)$; 2) вместо $(\alpha K y,\ P)\,\beta\,(p \to y)$ писать $\beta\,(\alpha\, K y \leftarrow P)$; 3) в формулах, в которых p становится предикатом или вхождением в предикат np, символ p рассматривать как группу терминов, образующуюся из P путем зачеркивания всех кванторов и знаков N. Такая упрощенная форма записи не всегда удобна, не всегда непосредственно отражает интерпретацию высказываний как предложений о включении предметов в класс, о наличии свойств у предметов, об отношении предметов и т. д. Но она удобна для интерпретации большинства высказываний и формул CS^3.

Под обоснованием формул CS^3 мы, как и выше, понимаем приведение такой интерпретации их, с точки зрения которой они интуитивно несомненны, приемлемы. При обосновании CS^3 достаточно рассмотреть формулы $\text{II}^0 1$ — $\text{II}^0 13$.

Высказывания CS^3 можно интерпретировать так:

1) $\alpha^1 K^1 x \rightarrow \alpha^2 K^2 y$ — «(каждый, не каждый, по крайней мере один, ноль) из иксов включается в (каждый, не каждый, по крайней мере один, ноль) из игреков»; например, $\forall x \rightarrow N\exists y$ интерпретируется как «каждый из x включается в ноль из y»;

2) $\alpha^2 K^2 y \leftarrow \alpha^1 K^1 x$ — «$\alpha^2 K^2 y$ таков, что $\alpha^1 K^1 x$ включается в него»; например, $\exists y \leftarrow N\forall x$ интерпретируется как «по крайней мере один из y таков, что в него включается не каждый из x»;

3) $M(\alpha^1 K^1 x \rightarrow \alpha^2 K^2 y)$ — «$\alpha^1 K^1 x$ не включается в $\alpha^2 K^2 y$ (исключается из $\alpha^2 K^2 y$)»; например, $M(\exists x \rightarrow \forall y)$ — «по крайней мере один из x не включается в каждый из y»;

4) $M(\alpha^2 K^2 y \leftarrow \alpha^1 K^1 x)$ — «$\alpha^2 K^2 y$ таков, что $\alpha^1 K^1 x$ не включается в него»; например, $M(\exists y \leftarrow N\forall x)$ — «по крайней мере один из y таков, что не каждый x не включается в него». Иногда $N\exists a$ удобнее читать как «нет такого a, что (в который)...».

Можно дать графическое изображение (схемы) данной интерпретации. При этом для простоты и наглядности можно предположить, что множество всех x (и множество всех y) состоит из двух и только из двух элементов. При помощи таких схем и их сопоставлений легко изобразить изложенные формулы и убедиться в их приемлемости.

Случаи, когда множество x (или y) пусто, мы не принимаем во внимание потому, что это относится к значениям истинности высказываний, а не к самому акту вывода одних высказываний из других. Правила вывода не зависят от значения истинности посылок (см. [3]) и от того, пусты или нет множества x и y. Так, $\forall x \rightarrow Ky \vdash \exists x \rightarrow Ky$ верно независимо от того, пусто x (или y) или нет. Использование же интерпретации, согласно которой x (и y) не пусто, нужно лишь для простоты и наглядности (как и рассмотрение непустого множества в виде множества из двух элементов).

Обоснование CS^4 (т. е. формул II'^0) осуществляется при помощи допущений, аналогичных допущениям при обосновании II' и сводящих обоснование CS^4 к обоснованию CS^3 (за исключением формул 18, 19 и 20, обоснование которых дано выше). Одним словом, обоснование CS^4 сводится к обоснованию CS^3. Отыскание непосредственной интуитивно ясной интерпретации для формул CS^4 принципиальных трудностей не представляет, поскольку достаточно вместо включения предметов и классов в класс взять аналогичное включение отношений и классов отношений в класс отношений. Но реализация этой интерпретации — дело очень громоздкое. Мы на этом останавливаться не будем.

Поскольку все рассмотрение силлогистических выводов осуществляется здесь на эмпирическом или интуитивном уровне (см. [3]), то проблема полноты в отношении систем CS^i есть прежде всего проблема интуитивной полноты (в смысле [3]). Для CS^1 важно, чтобы в ней охватывались все интуитивно приемлемые (правильные) модусы категорического силлогизма и «непосредственные» выводы. Система CS^2 обобщает CS^1 и должна быть рассмотрена исключительно с точки зрения правомерности такого обобщения (обоснование II'). В CS^3 присоединяется ряд формул таких, что CS^3 необходимо рассмотреть с точки зрения интуитивной полноты. Система CS^4 лишь обобщает CS^3 и CS^2, и в отношении к ней проблема интуитивной полноты теряет смысл.

Основные формулы II^0 системы CS^3 должны охватить некоторое конечное множество формул, приемлемых с точки зрения интуиции (в данном случае с точки зрения интерпретаций, к которым мы постоянно прибегаем), т. е. эти формулы должны быть правильными согласно CS^3 (включиться в список II^0 или быть правильными согласно II^0, I и правилам I^* и II^*). Каким образом устанавливается это множество формул (имеются в виду дополнения к CS^1 в CS^3)?

Возьмем, например, формулы $II^0 10$ — $II^0 13$. Они получены так: берем все возможные посылки $\alpha^1 K^1 x \to \alpha^2 K^2 y$, т. е. $\forall x \to \forall y$, $\forall x \to \exists y$, $\forall x \to N\forall y$, $N\forall x \to \forall y$, $\exists x \to N\forall y$ и т. д., рассматриваем каждую из них и выясняем все возможные допустимые (интуитивно, с точки зрения интуитивно ясной интерпретации) следствия $M(\alpha^3 K^3 x \rightarrow \alpha^4 K^4 y)$; осуществляем обобщение полученных формул (при помощи знаков α^i, K^i, $K^i O$, β) и выясняем, можно ли часть из них вывести из других (впрочем, это вопрос не столь важный с точки зрения проблемы интуитивной полноты, раз обобщение охватило все формулы рассматриваемого типа); этим путем мы охватываем некоторое множество приемлемых формул.

Можно доказать, что в CS^3 правильны формулы, образующиеся из формул II°5 путем замены $\exists$ на $\forall$. Вместе с формулами II°5 они охватывают все допустимые (а это выясняется при помощи схем, например) формулы, в которых описывается опосредствованный вывод. Помимо обобщения при помощи знаков K здесь используется исключение ряда формул из числа основных, поскольку правильность их можно доказать. Аналогично обстоит дело с формулами II°1 и II°2. Интуитивно приемлемыми считаются выводы от общего к частному (от $\forall a$ к $\exists a$) и от отрицания частного к отрицанию общего (от $N\exists a$ к $N\forall a$). Формулы II°1 и II°2 вместе с формулами $\beta(\forall x \rightarrow NKy) \vdash \beta(\exists x \rightarrow NKy)$, $\beta(N\exists x \rightarrow \alpha Ky) \vdash \beta(N\forall x \rightarrow \alpha Ky)$ и т. д., правильность которых доказывается в CS^3, охватывают все возможные случаи такого рода переходов. Здесь точно так же используется обобщение (в формулах II°1 и II°2 фигурируют знаки K и β) и дедукция.

Можно, далее, доказать, что в CS^3 правильны формулы $M(Kx \rightarrow \forall y) \vdash Kx \rightarrow N\exists y$, $Kx \rightarrow N\exists y \vdash M(Kx \rightarrow \forall y)$, $Kx \rightarrow \exists ny \vdash Kx \rightarrow N\exists y$, $Kx \rightarrow N\exists y \vdash Kx \rightarrow \exists ny$ и аналогичные формулы с другим порядком кванторных групп субъекта и предиката (со знаком $\leftarrow$). Вместе с II°6 и II°7 (а также с другими правильными согласно CS^3 формулами) они определяют отношения M, n и N. Здесь точно так же требуется выяснение всех интуитивно приемлемых случаев (а их конечное множество). Пересмотр всех возможных случаев перестановки кванторных групп, т. е. сравнение $\beta(\alpha^1 K^1 x \rightarrow \alpha^2 K^2 y)$ и $\beta(\alpha^2 K^2 y \leftarrow \alpha^1 K^1 x)$, позволяет исключить все перестановки как неправомерные, кроме указанных в II°8 и II°9.

Конечно, изложенный путь очень громоздок сравнительно с решением аналогичных проблем для некоторых логических систем. Однако, это неизбежное (по всей вероятности) зло, с которым приходится мириться при рассмотрении (и построении) систем такого рода (можно сказать, гносеологически интерпретированных логических систем).

Значением x будем называть x^* такой, что истинно $(\forall x^*)(x^* \to x)$ или, если опустить $\forall x^*$ (см. § 10), истинно $x^* \to x$. Отношение x и x^* можно интерпретировать как отношение более и менее общего терминов. Пусть A^* получено из $[\forall x] A$ путем замены всех вхождений x на x^* (и исключения $\forall x^*$, если это осуществляется). Пусть в B^* входит x^* и входит $\forall x^*$ или вообще не входит $\alpha \mathrm{K} x^*$, а $[\exists x] B$ получается из B^* путем замены всех вхождений x^* на x и замены $\forall x^*$ на $\exists x$ (или приписывания $\exists x$ в начале B, если $\forall x^*$ было опущено). В силлогистике, можно показать, будут правильными такие формулы: 1) $(x^* \to x) \cdot [\forall x] A \vdash A^*$; в частности, $(x^* \to x) \cdot ((\forall x)(x \to y)) \vdash (x^* \to y)$; 2) $(x^* \to x) \cdot B^* \vdash [\exists x] B$; в частности, $(x^* \to x) \cdot (x^* \to y) \vdash (\exists x)(x \to y)$. В соответствии с общим принципом дедукции (см. [3]) «Если $C \vdash D$ правильно (т. е. из C логически следует D) и C истинно, то D истинно» получим утверждения «Если $[\forall x] A$ истинно, то A^* истинно» и «Если B^* истинно, то $[\exists x] B$ истинно». Но это уже относится к области семантической интерпретации силлогистики, которая важна как описание условий использования правильных формул силлогистики в качестве правил вывода (правил логического следования; см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Лукасевич. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. ИЛ, 1959.
2. В. А. Смирнов. К теории категорического силлогизма. «Философские науки», 1959, № 3.
3. А. А. Зиновьев. Логика высказываний и теория вывода. Изд-во АН СССР, 1962.

В. А. Смирнов

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ СИСТЕМЫ СИЛЛОГИСТИКИ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ДЕДУКЦИИ

Аксиоматизируя силлогистику Аристотеля, Я. Лукасевич рассматривает ее как теорию преобразований высказываний определенного вида. В его изложении модусы силлогистики являются не правилами, а предложениями. В качестве теории, предшествующей силлогистике и предполагаемой ею, принимается классическое исчисление высказываний. А. А. Зиновьев [1] показал, что нет необходимости в качестве предшествующей теории принимать все исчисление высказываний; для целей силлогистики достаточно лишь некоторых принципов исчисления высказываний. Это побудило меня рассмотреть вариант теории силлогистики, не предполагающей в явном виде в качестве предшествующей теории исчисление высказываний.

Такая установка заставляет быть осторожным. Необходимо учесть все средства и предпосылки, на которых строится подобная система. Поэтому в § 1 я рассматриваю правила вывода (носящие металогический характер), не зависящие от принимаемой аксиоматики. Эти правила вытекают из определения вывода. Предлагаемая в § 2 система силлогистики использует эти правила. Очевидно, следует показать, что сами эти правила не предполагают исчисления высказываний. Обычно доказательство этих правил опускается, как само собой разумеющееся. Их доказательство не представляет особой трудности. Мы все же сочли уместным воспроизвести эти доказательства, так как, во-первых, встречается еще предубеждение, что эти правила недоказуемы, и, во-вторых, отсутствие этих доказательств в известных руководствах создает некоторые трудности у студентов. А широкое использование металогических средств при изучении логических исчислений несет большие, по крайней мере методические, преимущества.

В § 2 излагается вариант системы силлогистики, не предполагающей исчисления высказываний. При таком подходе модусы, принципы обращения и т. п. рассматриваются не как предложения, а как правила вывода силлогистики.

Третий параграф посвящен изложению двух систем исчислений высказываний генценовского типа; обе они в качестве основных логических знаков содержат только конъюнкцию и отрицание. Имеется аналогия между этими аксиоматиками исчисления высказываний и системой силлогистики, изложенной в § 2.

§ 1. Правила вывода, не зависящие от аксиоматики. Понятие вывода вообще, безотносительно к той или иной логической системе, невозможно. Оно является относительным. Ниже мы будем употреблять такие выражения, как «вывод формулы E из множества посылок Γ», «из множества посылок Γ выводима формула E», «если существует вывод формулы E из множества посылок Γ, то существует вывод формулы C из множества посылок Δ» и т. п. Все эти выражения следует понимать как сокращения более точных выражений: «вывод формулы E из множества посылок Γ в системе S» и т. д.

Каждая лингвистическая система S складывается из определения формулы, некоторой системы аксиом $A_1, \ldots, A_n$ (возможно пустой) и правил вывода $R_1, \ldots, R_m$. Далее обычно дается следующее определение вывода (в S) формулы E из множества посылок Γ. Вывод формулы E из множества посылок Γ есть последовательность формул, каждая из которых есть или одна из посылок Γ, или аксиома, или выводима из предшествующих (в выводе) формул по одному из правил $R_1, \ldots, R_m$.

Переформулируем это определение таким образом, чтобы оно носило явно выраженный индуктивный характер.

Предварительно определим множество посылок:

1) если A — формула, то A — множество посылок;

2) если Γ — множество посылок и A — формула, то A, Γ — множество посылок;

3) ничто другое не есть множество посылок. Из этого определения легко доказывается методом математической

индукции: если A — формула и Г — множество посылок, то Г, A — множество посылок; если Г и Δ — множества посылок, то Г, Δ — множество посылок.

Будем предполагать известным положение «формула A входит в множество посылок Г», а также обоснованным следующие утверждения:

(1) если A входит в Г, то A входит в Δ, Г (Г, Δ — множества посылок);

(2) если A входит в Г, то A входит в Г, Δ,

(3) если A входит в C, C, Г, то A входит в C, Г.

Будем также предполагать известным отношение «формула A входит в последовательность формул $B_1 \dots B_n$» и соответствующие этому отношению утверждения.

Теперь дадим индуктивное определение вывода формулы из множества посылок Г ($A_1, \dots, A_n$):

1) если E входит в Г, то E есть вывод формулы E из Г;

2) если E — аксиома, то E есть вывод формулы E из Г;

3) если $B_1 \dots B_m$ есть вывод формулы B_m из Г и E входит в Г, то $B_1 \dots B_m E$ есть вывод E из Г;

4) если $B_1 \dots B_m$ есть вывод формулы B_m из Г и E — аксиома, то $B_1 \dots B_m E$ есть вывод E из Г;

5) если $B_1 \dots B_m$ есть вывод формулы B_m из Г и $E \rightleftharpoons R_i(C_1, \dots, C_l)$, где R_i есть одно из основных правил системы и C_i входит в $B_1 \dots B_m$, то $B_1 \dots B_m E$ есть вывод формулы E из Г;

6) ничто другое не есть вывод формулы E из Г.

Докажем некоторые метатеоремы (являющиеся правилами вывода), вытекающие из определения вывода и свойств отношений вхождения формулы в множество посылок и вхождения в вывод. Утверждение «существует вывод формулы E из Г» будем записывать: $\Gamma \vdash E$ (из Г выводимо E); утверждение «по выводу формулы E из Г может быть построен вывод формулы C из Δ»[1] будем записывать: $\frac{\Gamma \vdash E}{\Delta \vdash C}$. Метатеорема типа $\Gamma \vdash E$ есть прямое правило вывода, типа $\frac{\Gamma \vdash E}{\Delta \vdash C}$ — вспомогательное. Вывод, запись которого стоит над чертой в правиле вспомога-

[1] Более того, это утверждение надо было бы формулировать так: «существует алгоритм, перерабатывающий вывод формулы E из Г в вывод формулы C из Δ».

тельного вывода будем называть **данным**, вывод, запись которого стоит под чертой — **результирующим**.

I. Если E входит в Γ, то $\Gamma \vdash E$.

Доказательство

1. E входит в Γ	условие.
2. E есть вывод E из Γ	ОВ1 (пунк 1 определения вывода)

Т. е. существует вывод (E) формулы E из Γ, другими словами: $\Gamma \vdash E$.

В частном случае, когда Γ состоит из E, имеем: $E \vdash E$.

Доказательство правил II—IV будем проводить индукцией по длине данного вывода[2].

$$\text{II}\ \frac{\Gamma \vdash E}{\Delta, \Gamma \vdash E}\ \text{добавление посылок.}$$

Доказательство

Базис. Длина данного вывода равна 1, т. е. вывод состоит из одной формулы E. Возможны два случая:

1) E входит в Γ и 2) E — аксиома.

1 случай

1. E входит в Γ	условие
2. E входит в Δ, Γ	(1)
3. E есть вывод из Δ, Γ	ОВ1

2 случай

1. E аксиома	условие
2. E есть вывод из Δ, Γ	ОВ2

Индукционный шаг. Пусть вывод формулы E из Γ длины $k+1$, т. е. имеет вид $B_1 \ldots B_k E$. Возможны

[2] При доказательстве II—IV фактически доказывается нечто большее, чем сформулировано в них. Так в доказательстве II доказывается: если M есть вывод E из Γ, то M есть вывод E из Δ, Γ, т. е. данный и результирующий выводы совпадают.

три случая: 1) E входит в Γ, 2) E — аксиома и 3) E непосредственно выводима из $C_1, \ldots, C_l$ по правилу R_i, где R_i — одно из основных правил системы, а C_i входит в $B_1 \ldots B_k$. и $B_1 \ldots B_k$ есть вывод B_k из Γ длины k.

1 случай

1. $B_1 \ldots B_k$ есть вывод B_k из Γ	длины k
2. $B_1 \ldots B_k$ есть вывод B_k из Δ, Γ	по индуктивному предположению из 1
3. E входит в Γ	условие
4. E входит в Δ, Γ	(I); 3
5. $B_1 \ldots B_kE$ есть вывод E из Δ, Γ	OB2; 2, 4

2 случай

1. $B_1 \ldots B_k$ есть вывод B_k из Γ	длины k
2. $B_1 \ldots B_k$ есть вывод B_k из Δ, Γ	по индуктивному предположению из 1
3. E аксиома	условие
4. $B_1 \ldots B_kE$ есть вывод E из Δ, Γ	OB2; 2, 3

3 случай

1. $B_1 \ldots B_k$ есть вывод B_k из Γ	длины k
2. $B_1 \ldots B_k$ есть вывод B_k из Δ, Γ	по индуктивному предположению из 1
3. E непосредственно выводима из $C_1, \ldots, C_l$ по правилу R_i, и C_i входит в $B_1 \ldots B_k$	условие
4. $B_1 \ldots B_kE$ вывод E из Δ, Γ	OB5; 2, 3

Базис доказан, индукционный шаг доказан; таким образом, по принципу математической индукции (вытекающему из индуктивного определения вывода) правило II доказано.

Частным случаем правила II при $\Delta = C$ будет

$$\frac{\Gamma \vdash E}{C,\ \Gamma \vdash E}.$$

III $\dfrac{\Delta,\ C,\ D,\ \Gamma \vdash E}{\Delta,\ D,\ C,\ \Gamma \vdash E}$ перестановка посылок

Доказательство

Базис. Длина данного вывода равна 1, поэтому возможны 5 случаев: 1) E — аксиома, 2) E — входит в Γ, 3) E есть C, 4) E есть D и 5) E входит в Δ.

Докажем случай 3: E есть C.

1. E есть C	условие
2. E входит в C, Γ	(2)
3. $C,\ \Gamma \vdash E$	OB1
4. $\Delta,\ D,\ C,\ \Gamma \vdash E$	правило II, 3.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Индукционный шаг. Пусть вывод E из Δ, C, D, Γ длины $k+1$. Тогда он имеет вид $B_1 \ldots B_k E$, где $B_1 \ldots B_k$ — вывод B_k из Δ, C. D, Γ длины k. Возможны шесть случаев: пять аналогичных случаям базиса и 6) E непосредственно выводима из $C_1, \ldots, C_l$ по правилу R_i, и C_i входит в $B_1 \ldots B_k$.

Для примера докажем шестой случай, остальные доказываются аналогично.

Случай 6

1. $B_1 \ldots B_k$ есть вывод из Δ, C, D, Γ	длины k
2. $B_1 \ldots B_k$ есть вывод из Δ, D, C, Γ	по индуктивному предположению
3. E выводима из $C_1, \ldots, C_l$ по правилу R_i и C_i входит в $B_1 \ldots B_k$	условие
4. $B_1 \ldots B_k E$ есть вывод из Δ, D, C, Γ	OB5; 2, 3

Таким образом, правило III доказано. Вместо формул C, D можно было бы рассматривать множества посылок — ход доказательства от этого не изменится.

IV $\dfrac{C, C, \Gamma \vdash E}{C, \Gamma \vdash E}$ опускание одной из двух тождественных посылок

Доказывается аналогично предыдущим (3 случая в базисе, 4 — в индукционном шаге).

V $\dfrac{\Delta \vdash C; \ C, \Gamma \vdash E}{\Delta, \Gamma \vdash E}$

План построения результирующего вывода у нас будет несколько отличаться от варианта Клини. У него каждое вхождение формулы C в качестве посылки в вывод E из C, Γ, замещается выводом C из Δ. У нас вывод C из Δ приставляется к выводу E из C, Γ слева (сверху) и меняется анализ каждого вхождения C в качестве посылки в C, Γ. Мы собственно докажем следующее: если M есть вывод C из Δ и N есть вывод E из C, Γ, то MN есть вывод E из Δ, Γ.

Для доказательства этого предложения потребуется следующая лемма:

Если C входит в $B_1 \dots B_m$ и $B_1 \dots B_m$ есть вывод B_m из Γ, то $B_1 \dots B_m C$ есть вывод C из Γ. Это имеет место. C может входить в $B_1 \dots B_m$ или в качестве посылки (т. е. быть одной из Γ), или в качестве аксиомы, или в качестве формулы, непосредственно следующей из предшествующих. Пусть $M \eqcirc B_1 \dots B_m$. Если C входит в M в качестве посылки, то MC — вывод из Γ (ОВ3); если в качестве аксиомы, то MC — вывод из Γ (ОВ4); наконец, если C входит в M в качестве формулы непосредственно следующей из формул за номером $k_{i_1}, \dots, k_{i_n}$, то MC есть также вывод C из Γ (ОВ5), где последняя формула есть формула, непосредственно следующая из формул $k_{i_1}, \dots, k_{i_n}$.

Приступим к доказательству теоремы. Доказательство будет вестись индукцией по длине второго данного вывода, т. е. по длине $C, \Gamma \vdash E$.

Базис. ($N \eqcirc E$). Возможны три случая: 1) E — одна из Γ, 2) E есть C, 3) E — аксиома.

1 случай

1. M — вывод C из Δ — условие
2. M — вывод C из Δ, Γ — добавление и перестановка посылок

3. E — одна из Г	условие
4. E — одна из Δ, Г	(1)
5. ME — вывод E из Δ, Г	ОВ 3; 2, 4

2 случай

1. M вывод C из Δ	условие
2. M — вывод C из Δ, Г	добавление и перестановка посылок, 1
3. C входит в M	условие
4. ME (т. е. MC) есть вывод E из Δ, Г	лемма; 2, 3

3 случай

1. M — вывод C из Δ	условие
2. M — вывод C из Δ, Г	добавление и перестановка посылок
3. E — аксиома	условие
4. ME — вывод E из Δ, Г	ОВ4; 2, 3

Индукционный шаг. Пусть вывод E из C, Г имеет длину $k+1$, т. е. имеет вид NE, где N — вывод некоторой формулы из C, Г длины k.

Возможны следующие случаи: 1) E — одна из Г, 2) E есть C, 3) E — аксиома и 4) E непосредственно следует из формул, входящих в N.

Случай 1

1. M — вывод C из Δ	условие
2. N — вывод D из Г	длины κ, условие
3. MN — вывод D из Δ, Г	по индуктивному предположению
4. E — одна из Г	условие
5. E — одна из Δ, Г	(1)
6. MNE — вывод E из Δ, Г	ОВ1; 3, 5

Случай 2

1. M — вывод C из Δ	условие
2. N — вывод D из Г	длины κ, условие
3. MN — вывод из Δ, Г	по индуктивному предположению

4. E входит в $M(C \supset E)$
5. E входит в MN — свойство вхождения в вывод, аналогично (1) для множества посылок
6. MNE есть вывод E из Δ, Γ — лемма; 3, 5

Случай 3

4. E — аксиома — условие
5. MNE есть вывод из Δ, Γ — ОВ4; 3, 4

Случай 4

4. E непосредственно следует из формул, входящих в N — условие
5. E непосредственно следует из формул, входящих в MN — свойство вхождения в вывод
6. MNE — вывод E из Δ, Γ — ОВ5; 3, 5

Теорема доказана.

Частными случаями V будут:

VI $\dfrac{\Delta \vdash C;\ C \vdash E}{\Delta \vdash E}$ (Γ — пустое) транзитивность выводимости ($\vdash_{\text{тр.}}$);

VII $\dfrac{\vdash C;\ C,\ \Gamma \vdash E}{\Gamma \vdash E}$ (Δ — пустое);

VIII $\dfrac{\vdash C;\ C \vdash E}{\vdash E}$ (Γ, Δ — пустые).

Правило V может быть обобщено в

IX $$\frac{\Delta_1 \vdash C_1; \ldots; \Delta_n \vdash C_n;\ C_1, \ldots, C_n, \Gamma \vdash E}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Gamma \vdash E}.$$

И, в частности, с пустым Γ, с равными $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ с пустыми Δ_i.

X $$\frac{\Delta_1 \vdash C_1; \ldots; \Delta_n \vdash C_n;\ C_1, \ldots, C_n \vdash E}{\Delta_1, \ldots, \Delta_n \vdash E};$$

XI $\dfrac{\Delta\vdash C_1;\ldots;\Delta\vdash C_n;\ C_1,\ldots,C_n,\Gamma\vdash E}{\Delta,\Gamma\vdash E}$;

XII $\dfrac{\Delta\vdash C_1;\ldots;\Delta\vdash C_n;\ C_1,\ldots,C_n\vdash E}{\Delta\vdash E}$;

XIII $\dfrac{\vdash C_1;\ldots;\vdash C_n;\ \ C_1,\ldots,C_n,\Gamma\vdash E}{\Gamma\vdash E}$.

На основе X имеет место следующее положение: если в системе S имеет место правило прямого вывода $C_1,\ldots,C_n\vdash E$, то в этой системе имеет место и вспомогательный вывод $\dfrac{\Delta_1\vdash C_1;\ldots;\Delta_n\vdash C_n}{\Delta_1,\ldots,\Delta_n\vdash E}$, и в частности $\dfrac{\Gamma\vdash C_1;\ldots;\Gamma\vdash C_n}{\Gamma\vdash E}$.

Например, в исчислении высказываний прямым правилам соответствуют следующие вспомогательные

$\&_в$ $A, B\vdash A\& B$ соответствует $\dfrac{\Gamma\vdash A;\ \Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\& B}$ ($\&_{Гв}$) XIV

$\supset_у$ $A, A\supset B\vdash B$ соответствует $\dfrac{\Gamma\vdash A;\ \Delta\vdash A\supset B}{\Gamma,\ \Delta\vdash B}$ ($\supset_{Гу}$) XV

и т. д.

В последнем случае при $\Gamma=\Delta$ имеем $\dfrac{\Gamma\vdash A;\Gamma\vdash A\supset B}{\Gamma\vdash B}$ XVI

При пустом Δ — $\dfrac{\Gamma\vdash A;\ \vdash A\supset B}{\Gamma\vdash B}$ XVII

при пустом Γ — $\dfrac{\vdash A;\ \Delta\vdash A\supset B}{\Delta\vdash B}$ XVIII

На основе $\supset_у$ и V легко доказывается обращение теоремы дедукции $\dfrac{\Gamma\vdash A\supset B}{\Gamma,\ A\vdash B}$ XIX

Действительно

1. $\Gamma\vdash A\supset B$ условие
2. $A,\ A\supset B\vdash B$ $\supset_у$
3. $\Gamma,\ A\vdash B$ V; 1, 2

Можно безусловно найти еще много других полезных правил вывода, не зависящих от аксиом и производных правил вывода, специфических для определенных систем[3].

§ 2. **Система силлогистики, не предполагающая исчисления высказываний.** Построим вариант системы силлогистики. Эту систему будем рассматривать как одну из конкретных синтаксических систем.

Введем следующие определения.

I. a, b, c — суть переменные.

II. A, E, I, O — логические константы.

Пусть K обозначает одну из четырех констант (роль K аналогична роли ∇ при построении исчисления высказываний).

III. K^* есть O, если K есть A;
K^* есть I, если K есть E;
K^* есть E, если K есть I;
K^* есть A, если K есть O;

IV Если m и n — переменные, то Kmn (т. е. Amn, Emn, Imn, Omn) есть формула; иных формул нет.

В системе нет аксиом, а только одни правила вывода: четыре правила непосредственного следования и два основных правила вспомогательного типа

---

[3] Широкое употребление металогических средств с самого начала построения логических систем делает более простым и прозрачным доказательство ряда теорем и метатеорем. Так, при аксиоматике исчисления высказываний, изложенной у Клини [3] $\vee у$ и $\neg в$ могут быть доказаны следующим образом:

1. $\Gamma, A \vdash C$	
2. $\Gamma \vdash A \supset C$	т. д.; 1
3. $\Gamma, B \subset C$	
4. $\Gamma \vdash B \supset C$	т. д.; 3
5. $\vdash (A \supset B) \supset \supset ((B \supset C) \supset \supset (A \vee B \supset C))$	(аксиома)
6. $\Gamma \vdash (B \supset C) \supset \supset (A \vee B \supset C)$	XVII; 2, 5
7. $\Gamma \vdash A \vee B \supset C$	пр. XVI; 4, 6
8. $\Gamma, A \vee B \vdash C$	обр. т. д.; 7

1. $\Gamma, A \vdash B$	
2. $\Gamma \vdash A \supset B$	т. д.; 1
3. $\Gamma, A \vdash \neg B$	
4. $\Gamma \vdash A \supset \neg B$	т. д.; 3
5. $\vdash (A \supset B) \supset \supset ((A \supset \neg B) \supset \supset \neg A)$	(аксиома)
6. $\Gamma \vdash (A \supset \neg B) \supset \neg A$	пр. XVII; 2, 5
7. $\Gamma \vdash \neg A$	пр. XVI; 4, 6

Правила непосредственного следования

$$R_1 \ \frac{Aab,\ Abc}{Aac} \ \text{(Barbara)}$$

$$R_2 \ \frac{Aab,\ Ebc}{Eac} \ \text{(Celarent)}$$

$$R_3 \ \frac{Iab}{Iba} \ \text{(обращение } I\text{)}$$

$$R_4 \ \frac{Aab}{Iab} \ \text{(от общего к частному)}$$

На основе этих правил определяем вывод.

Вывод формулы P из множества посылок Γ есть последовательность формул (для удобства столбец), каждая из которых есть или одна из Γ или непосредственно следует из предыдущих по одному из правил R_1—R_4.[4]

Система содержит еще два правила особого рода.

$$R_5 \ \frac{\Gamma,\ P \vdash Q}{\Gamma,\ Q^* \vdash P^*},$$

где P и Q — формулы, Γ — множество посылок, P^* и Q^* — формулы, образованные из P и Q соответственно заменой константы K на K^*.

Подстановкой одной переменной вместо другой в формулу P назовем одновременное замещение всех вхождений этой переменной в P другой.

Подстановкой одной переменной вместо другой в множество формул Γ назовем подстановку в каждую формулу этого множества.

Результат подстановки в формулу P будем обозначать P^+, в множество формул Γ — Γ^+.

Тогда правило подстановки сформулируется следующим образом:

$$R_6 \ \frac{\Gamma \vdash P}{(\Gamma \vdash P)^+}$$

Ясно, что в нашей системе имеют место также все металогические правила вывода, вытекающие из определения вывода и разобранные в § 1.

Правила R_5 и R_6 суть правила вспомогательного типа, но не производные, а основные. Они говорят не

---

[4] Более развернутую форму легко дать по аналогии с § 1. Поскольку нет аксиом, то определение вывода сокращается.

о возможности перейти от одних формул к другим, а о возможности перехода от одних выводов к другим. Каждое вспомогательное правило естественно трактовать как утверждение о наличии алгоритма, преобразующего данный вывод в результирующий. Поскольку эти правила принимаются за основные, то внутри системы такого алгоритма нет; если бы он был, то правила R_5 и R_6 незачем было бы принимать в качестве основных. R_5 не только не дает эффективного метода, но и вообще невозможно показать пример результирующего вывода для какого-нибудь данного. Например, согласно R_5, для данного вывода

1. Aab посылка
2. Abc посылка
3. Aac R_1; 1, 2

должен существовать результирующий (вывод Obc из Aab, Oac). Но как его построить на основе правил R_1—R_4? Согласно R_5, мы принимаем, что такой вывод есть, но осуществить его не можем.[5]

Такая ситуация характерна, видимо, не только для системы силлогистики, но и для других систем, построенных аналогичным способом.

Нам представляется, что предложенный вариант силлогистики, соответствует если не аристотелевскому, то традиционному способу построения силлогистики. Очевидно, существенное включение средств металогики (R_5 и R_6) и делает возможным элиминацию исчисления высказываний.

Из R_1—R_6 выводятся общие правила силлогистики: правила обращения, все модусы, правила сложных силлогизмов (с n посылками) и т. д.

Продемонстрируем доказательство некоторых из них. Сначала отметим, что каждому правилу R_1—R_4 соответствует производное правило. Так $R_1\left(\frac{Aab,\ Abc}{Aac}\right)$ соответствует $Aab,\ Abc \vdash Aac$. Обозначим его R_1'. Аналогично для R_2, R_3, R_4.

[5] Проф. Сушко, просматривая рукопись, отметил, что это кажущаяся парадоксальность и ее легко можно преодолеть. Действительно, можно следующим образом видоизменить построение силлогистики. Правила вывода силлогистики вводим индуктивно: R_1—R_4 — базисные правила, R_5 и R_6 — операции, порождающие из одних правил вывода другие. Затем на этой основе строится понятие вывода и т. д.

1. Обращение E

$Eab \vdash Eba$

1.	$Iab \vdash Iba$	R'_3
2.	$Iba \vdash Iab$	R_6; 1
3.	$Eab \vdash Eba$	R_5; 2

2. Обращение A

$Aab \vdash Iba$

1.	$Iab \vdash Iba$	R'_3
2.	$Aab \vdash Iab$	R'_4
3.	$Aab \vdash Iba$	$\vdash_{\text{тр.}}$; 1, 2.

3. От общего к частному

$Eab \vdash Oab$

1.	$Aab \vdash Iab$	R'_4
2.	$Eab \vdash Oab$	R_5; 1

4. *Barbari*

$Aab,\ Abc \vdash Iac$

1.	$Aab,\ Abc \vdash Aac$	R'_1
2.	$Aac \vdash Iac$	R'_4; R_6
3.	$Aab,\ Abc \vdash Iac$	$\vdash_{\text{тр.}}$; 1, 2

5. *Darii*

$Iab,\ Abc \vdash Iac$

1.	$Aab,\ Ebc \vdash Eac$	R'_2
2.	$Abc,\ Eca \vdash Eba$	R_6; 1
3.	$Eca,\ Abc \vdash Eba$	перестановка посылок, 2
4.	$Eac \vdash Eca$	производное правило 1.
5.	$Eac,\ Abc \vdash Eba$	V; 3, 4
6.	$Eba \vdash Eab$	правило 1
7.	$Eac,\ Abc \vdash Eab$	$\vdash_{\text{тр.}}$; 5, 6
8.	$Abc,\ Eac \vdash Eab$	перестановка посылок, 7
9.	$Abc,\ Iab \vdash Iac$	R_5; 8
10.	$Iab,\ Abc \vdash Iac$	перестановка посылок, 9

6. *Ferio*

$Iab,\ Ebc \vdash Oac$

1.	$Iab,\ Abc \vdash Iac$	пр. 5
2.	$Iba,\ Aac \vdash Ibc$	R_6; 1
3.	$Iba,\ Ebc \vdash Oac$	R_5; 2
4.	$Iab \vdash Iba$	R'_3
5.	$Iab,\ Ebc \vdash Oac$	V, 3, 4

7. *Celarent*

$Aab,\ Ebc \vdash Oac$

1. $Aab,\ Ebc \vdash Eac$ $\qquad R'_2$
2. $Eac \vdash Oac$ $\qquad$ пр. 3; R_6
3. $Aab,\ Ebc \vdash Oac$ $\qquad \vdash_{\text{тр.}};\ 1,\ 2$

Модусы второй и третьей фигур получаются путем применения R_5 (сразу или после перестановки посылок) к каждому из модусов первой фигуры. Здесь роль R_5 аналогична принципу расширенной контрапозиции $(A \& B \supset C \vdash A \& \neg C \supset \neg B \vdash \neg C \& B \supset \neg A)$ при базировании силлогистики на исчислении высказываний (см. [4]).

Из системы $R_1 — R_6$ выводятся и все правила сложных силлогизмов, т. е. силлогизмов, состоящих из n посылок $(n > 2)$.

Для силлогизма из двух посылок возможны три фигуры (три способа распределения переменных) с точностью до порядка посылок и переименования переменных. Это видно из R_5 и правила перестановки посылок: $P,\ Q \vdash S;\ P,\ S^* \vdash Q^*;\ Q,\ S^* \vdash P^*$. Для силлогизмов с n посылками имеется в вышеуказанном смысле $n+1$ фигур:

$$P_1,\ \ldots,\ P_n \vdash Q;\ P_1,\ \ldots,\ P_{n-1},\ Q^* \vdash P_n^*;\ \ldots$$
$$\ldots Q^*,\ P_2,\ \ldots,\ P_n \vdash P_1^*.$$

Если под первой фигурой сложного силлогизма с n посылками иметь в виду

$$Ka_1a_2,\ Ka_2a_3,\ \ldots,\ Ka_na_{n+1} \vdash Ka_1a_{n+1} \qquad \text{(I)}$$

и всякий силлогизм, образованный из него при помощи правила перестановки посылок и правила подстановки (R_6), примененных несколько раз, то первая фигура при любом n будет иметь только шесть модусов[6]. В силлогизме первой фигуры (в каноническом виде I) с n посылками $(n > 2)$ промежуточная посылка должна быть **общей**, так как она выступает большей по отношению к результату предыдущих шагов. Она должна быть также **утвердительной**. Если бы она была отрицательной,

---

[6] Анализ первой фигуры с двумя посылками показывает, что в первой фигуре силлогизма меньшая посылка может быть только утвердительной (A или I), бóльшая — общей (A или E).

то результат шага, в котором эта промежуточная посылка выступает в качестве большей, будет отрицательным; а этот результат в следующем шаге играет роль меньшей посылки, которая не может быть отрицательной. Следовательно, количество модусов в первой фигуре сложного силлогизма определяется распределением A, E, I, O в крайних посылках, т. е. число модусов в первой фигуре с n посылками будет равно шести.

Отсюда ясно, что каждая другая из $n+1$ фигур сложного силлогизма будет иметь по шесть модусов. Из того факта, что промежуточные посылки в первой фигуре суть A, следует, что во всех фигурах, кроме трех, вывод будет частноотрицательным (O). Из

$$Ka_1a_2, \ldots, Aa_ia_{i+1}, \ldots, Ka_na_{n+1} \vdash Ka_1a_{n+1}$$

следует

$$Ka_1a_2, \ldots, K^*a_1a_{n+1}, \ldots Ka_na_{n+1} \vdash Oa_ia_{i+1} \; (1 < i < n+1).$$

§ 3. Построение силлогистики путем задания правил вывода двух типов, очевидно, не является специфическим для силлогистики. Таким же способом может быть построено и исчисление высказываний. Системы генценовского типа являются такого рода системами. Ниже мы строим две системы исчисления высказываний S_1 и S_2. Обе они в качестве основных логических символов содержат только & и $\neg$. Определение вывода основывается в каждой из систем на правилах 1—4. В обоих случаях выбираем вариант схем, не принимая правил подстановки в качестве основного.

Система S_1	Система S_2
$R_1 \dfrac{A,\ B}{A \& B}$	$R'_1 \dfrac{A,\ B}{A \& B}$
$R_2 \dfrac{A \& B}{A}$	$R'_2 \dfrac{A \& B}{A}$
$R_3 \dfrac{A \& B}{B}$	$R'_3 \dfrac{A \& B}{B}$
$R_4 \dfrac{\neg\neg A}{A}$	$R'_4 \dfrac{\neg\neg A}{A}$
$R_5 \dfrac{\Gamma,\ A \vdash B;\ \Gamma,\ A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$	$R'_5 \dfrac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma,\ \neg B \vdash \neg A}$

Во-первых, покажем, что в S_1 имеют место все правила введения и удаления логических символов, тем самым S_1 эквиполентна другим построениям классического исчисления высказываний.

Из R_1 получим правило введения конъюнкции: $\&_в\, A, B \vdash A \& B$; из R_2 и R_3 — правила удаления конъюнкции; из R_4 — удаления отрицания; R_5 есть правило введения отрицания.

Примем следующие определения:

$$A \vee B =_{Df} \neg(\neg A \& \neg B)$$

$$A \supset B =_{Df} \neg(A \& \neg B)$$

$$A \sim B =_{Df} \neg(A \& \neg B) \& \neg(B \& \neg A)$$

Докажем правила введения и удаления логических символов и некоторые другие.

1. $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}$

1. $\Gamma, A \vdash B$	условие
2. $\Gamma, \neg B, A \vdash B$	добавление и перестановка посылки; 1
3. $\Gamma, \neg B, A \vdash \neg B$	I (§ 1)
4. $\Gamma, \neg B \vdash \neg A$	R_5; 2, 3

2. $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \neg(A \& \neg B)}$ (теорема дедукции)

$\supset$ — введение

1. $\Gamma, A \vdash B$	условие
2. $A \& \neg B \vdash A$	$\&_у$
3. $\Gamma, A \& \neg B \vdash B$	V (§ 1); 1, 2
4. $\Gamma, A \& \neg B \vdash \neg B$	$\&_{Гу}$
5. $\Gamma \vdash \neg(A \& \neg B)$	R_5; 3, 4

3. $A, \neg(A \& \neg B) \vdash B$

$\supset$-удаление (*modus ponens*)

1.	$A, \neg B \vdash A \& \neg B$	$\&_в$
2.	$A, \neg(A \& \neg B) \vdash \neg\neg B$	пр. 1; 1
3.	$\neg\neg B \vdash B$	$\neg_у$
4.	$A, \neg(A \& \neg B) \vdash B$	$\vdash_{тр.}$; 2, 3

4. $A \vdash \neg\neg A$

1.	$A, \neg A \vdash A$	I (§ 1)
2.	$A, \neg A \vdash \neg A$	I (§ 1)
3.	$A \vdash \neg\neg A$	R_5; 1, 2

5. $A \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$

V — введение

1.	$\neg A \& \neg B \vdash \neg A$	$\&_у$
2.	$\neg\neg A \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$	правило 1; 1
3.	$A \vdash \neg\neg A$	правило 4
4.	$A \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$	$\vdash_{тр.}$ 2, 3

6. $\dfrac{\Gamma,\ A \vdash C;\ \Gamma,\ B \vdash C}{\Gamma,\ \neg(\neg A \& \neg B) \vdash C}$

V — удаление

1.	$\Gamma,\ A \vdash C$	условие
2.	$\Gamma,\ \neg C \vdash \neg A$	правило 1, 1
3.	$\Gamma,\ B \vdash C$	условие
4.	$\Gamma,\ \neg C \vdash \neg B$	правило 1; 3
5.	$\Gamma,\ \neg C \vdash \neg A \& \neg B$	$\&_{Гв}$ (см. конец § 1)
6.	$\Gamma,\ \neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg\neg C$	правило 1; 5

7. $\neg\neg C \vdash C$ правило 4

8. $\Gamma, \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash C$ $\vdash_{\text{тр.}}$ 6, 7

$$7.\ \frac{\Gamma, A \vdash B;\ \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash \neg(A \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg(B \,\&\, \neg A)}$$

$\sim$ — введение

1. $\Gamma, A \vdash B$ условие
2. $\Gamma \vdash \neg(A \,\&\, \neg B)$ $\supset_{\text{в}}$; 1
3. $\Gamma, B \vdash A$ условие
4. $\Gamma \vdash \neg(B \,\&\, \neg A)$ $\supset_{\text{в}}$; 3
5. $\Gamma \vdash \neg(A \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg(B \,\&\, \neg A)$ $\&_{\text{Гв}}$; 2, 4

8. $A, \neg(A \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg(B \,\&\, \neg A) \vdash B$

$\sim$ — удаление

1. $\neg(A \,\&\, \neg B) \,\&\, \neg(B \,\&\, \neg A)$ посылка
2. $\neg(A \,\&\, \neg B)$ $\&_{\text{у}}$; 1
3. A посылка
4. B $\supset_{\text{у}}$; 3, 2

Система S_1 содержит правила введения и удаления логических символов и тем самым все исчисление высказываний.

Обратимся к системе S_2. Покажем, что в S_2 выводимо правило R_5 системы S_1 и тем самым, что S_2 эквивалентна системе S_1 и другим системам классического исчисления высказываний.

В качестве частных случаев R_5' содержит:

a) $\dfrac{A \vdash B}{\neg B \vdash \neg A}$, когда Γ пустое

b) $\dfrac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}$, когда B пустое

c) $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash}$, когда A пустое

d) $\dfrac{A \vdash}{\vdash \neg A}$, когда Г и B пустые

e) $\dfrac{\vdash B}{\neg B \vdash}$, когда Г и A пустые.

При помощи R_5'(c) и R_5'(d) докажем $\vdash \neg(B \& \neg B)$ и при помощи последнего результата R_5.

(Пр.) $\vdash \neg(B \& \neg B)$

1. $B \vdash B$	I (§ 1)
2. $B, \neg B \vdash$	R_5'(c); 1
3. $B \& \neg B \vdash$	на основе правила $\dfrac{A, B \vdash C}{A \& B \vdash B}$ с пустым C
4. $\vdash \neg(B \& \neg B)$	R_5'(d); 3

$$R_5 \, \frac{\Gamma, A \vdash B; \; \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}.$$

1. $\Gamma, A \vdash B$	условие
2. $\Gamma, A \vdash \neg B$	условие
3. $\Gamma, A \vdash B \& \neg B$	$\&_{\text{Ге}}$; 1, 2
4. $\Gamma, \neg(B \& \neg B) \vdash \neg A$	R_5'; 3
5. $\vdash \neg(B \& \neg B)$	(Пр.)
6. $\Gamma \vdash \neg A$	VII (§ 1); 5, 4

В заключение хотелось бы обратить внимание на необходимость более детального анализа взаимоотношений средств логики и металогики.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Зиновьев. Обобщение силлогистики. В данном сборнике.
2. Я. Лукасевич. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики, ИЛ, 1959.
3 С. К. Клини. Введение в метаматематику. ИЛ, 1957.
4. В. А. Смирнов. К теории категорического силлогизма. «Философские науки», 1959, № 3.

В. А. Смирнов

АЛГОРИТМЫ И ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ АЛГОРИТМОВ

В настоящее время теория алгоритмов развивается под влиянием трех групп задач; соответственно имеются три тенденции в развитии теории алгоритмов.

Первое направление развивает теорию алгоритмов в целях теоретического обоснования; сюда относятся проблемы, встающие в символической логике и математических теориях, прежде всего проблемы возможности или невозможности алгоритмов, проблемы разрешения в символической логике, задачи самой теории алгоритмов.

Второе направление рассматривает теорию алгоритмов как обобщение практики программирования; хотя каждый тип машин имеет свой язык, ограниченный техническими характеристиками машины, но проблемы обмена программами, автоматизации программирования ставят специфические задачи перед теорией алгоритмов.

Наконец, свои требования к теории алгоритмов предъявляют поставщики задач. Они требуют разработки таких вариантов алгоритмов, которые были бы удобны для нахождения и формулировки решения встающих задач. Каждое из перечисленных направлений вырабатывает наиболее удобное для него уточнение понятия «алгоритм».

В данной статье мы сравним уточнения, возникающие на разной основе, и попытаемся проанализировать понятие алгоритма как понятие логики.

I. В интуитивном, содержательном смысле под алгоритмом понимают общепонятное и однозначное предписание, какие и в каком порядке производить действия, чтобы получить искомый результат. Характерной особенностью алгоритма является его массовость, т. е.

возможность исходить из варьируемых в известных пределах исходных данных. В таком понимании алгоритм известен в математике давно. Так говорят об алгоритме извлечения квадратного корня, алгоритме решения линейного уравнения, алгоритме выводимости в исчислении высказываний и т. д.

Но интуитивное понятие алгоритма не является рабочим. При помощи такого понятия алгоритма нельзя доказать ни важных теорем теории алгоритмов, ни вообще создать такой теории. Необходимо выработать строгое понятие алгоритма. Последняя задача была решена в 30-е годы на базе развития теории доказательств и проблем, связанных с обоснованием арифметики. Причем параллельно было выработано несколько таких понятий, которые, как было доказано, в определенном смысле эквивалентны. Прежде чем говорить об этих точных понятиях алгоритма, поставим вопрос, что значит выработать строгое понятие вообще.

Выработка точного понятия осуществима друмя путями:

1) можно определить понятие посредством других, принимаемых за точные, т. е. ввести его чисто логическими средствами на базе других строгих понятий;

2) можно уточнить интуитивное понятие, т. е. выработать такое понятие, которое выполняло бы работу первого. Задачу замены интуитивного понятия строгим Р. Карнап называет экспликацией[1].

Рассмотрим несколько ближе, что представляет экспликация, ибо выработка строгого понятия алгоритма есть именно экспликация, а не определение, как и вообще всех фундаментальных, основных понятий.

В отличие от интуитивного понятия (экспликанда), уточненное понятие (экспликат) строится над объектами фиксированного класса. Так, любое уточнение алгоритма говорит об алгоритме над объектами определенного класса; это будут или натуральные числа (алгоритм в форме рекурсивных функций), или

---

[1] «Под экспликацией хорошо знакомого, но неточного понятия мы имеем в виду замещение его новым, точным понятием, первое называется экспликандом, последнее — экспликатом» (Р. Карнап. Значение и необходимость. М., 1959, стр. 36). Термин «экспликация» употреблялся еще И. Кантом («Критика чистого разума». Учение о методе, II глава, 1 секция).

слова некоторого алфавита (алгорифм Маркова) или объекты ленты (машина Тьюринга) и т. д.; алгоритм в интуитивном смысле понимается как алгоритм над объектами произвольных классов. Ясно, что экспликация будет оправдана, если объекты, относительно которых формулируется алгоритм (или другое понятие) в интуитивном смысле, могут быть изображены объектами выделенного класса.

Но экспликация состоит не только в этом. Необходимо, во-вторых, фиксировать элементарные предикаты над объектами этого класса или элементарные действия в случае алгоритмов и, в-третьих, задать способы образования из одних предикатов других или допустимые последовательности действий.

Под уточненным понятием алгоритма мы будем понимать предписание произвести определенные (для каждого уточнения фиксированные) действия в определенной (для данного уточнения) последовательности над объектами фиксированного класса.

Каждое уточнение алгоритма сопровождается принципом стандартизации, который гласит: всякому алгоритму в интуитивном смысле может быть поставлен в соответствие стандартный алгоритм. Это значит:

1) объекты кодируются, действиям над объектами соответствуют действия над кодами;

2) самому интуитивному алгоритму ставится в соответствие стандартный алгоритм.

Очевидно, что принципом стандартизации сопровождается не только экспликация алгоритма, но и экспликация любого понятия. Принцип стандартизации не является логически доказуемой теоремой. Истинность того или иного принципа стандартизации, соответственно правомерность того или иного уточнения, доказывается всей практикой. Было предложено несколько уточнений алгоритма: общерекурсивные функции, λ-определимость, вычислимость по Тьюрингу, функции, изобразимые в формальной системе (Гёдель), нормальные системы Поста, нормальные алгорифмы Маркова, алгоритмы Колмогорова. Все эти уточнения возникли на базе задач обоснования математики и символической логики. Они оказались эквивалентными. Это лишний раз доказывает, что экспликация произведена правильно и принцип стандартизации алгоритмов истинен. Для тех или иных задач удобнее (не более) выбрать ту или иную экспликацию. В последнее время та или иная экспликация понятия алгоритма оценивается не только с точки зрения принципиальных задач символической логики и самой теории алгоритмов, но и с точки зрения удобства и эффективности алгоритмизации математических, логических и других задач; как мы выше отметили, определенные требования предъявляет и практика программирования (имеется в виду удобство записи для машины).

В связи с этим был предложен ряд иных уточнений. Сюда относятся логические схемы алгоритмов А. А. Ляпунова [2], графы Л. А. Калужнина [3]. Это не уточнения алгоритма в собственном смысле слова, а лишь схемы алгоритмов, т. е. речь идет лишь о порядке выполнения действий и порядке передачи управления. В схемах алгоритмов абстрагируются как от природы допустимых действий, так и от класса объектов, над которыми производятся действия. Мы ставим себе задачу вычленить схемы алгорифмов А. А. Маркова и сравнить их со схемами алгоритмов А. А. Ляпунова.

Ляпунов все действия делит на два класса: арифметические операторы и логические. Логическая схема алгоритмов записывается как последовательность логических и арифметических операторов. У логического оператора стоит внизу стрелка с номером, причем одноименная стрелка стоит вверху у какого-то другого оператора.

Логическая схема работает по следующим правилам:

1) если арифметический оператор сработал, то работает следующий член схемы;

2) если логическое условие выполнено, то работает член справа;

3) если условие не выполнено, то работает тот член, при котором стоит стрелка с тем же номером, что и при данном логическом условии.

Логические схемы алгоритмов, предложенные А. А. Ляпуновым, можно изобразить при помощи блок-схемы. Арифметический оператор имеет один вход и один выход, логический оператор — один вход и два выхода. Выход каждого оператора может быть соединен с одним входом, но вход — с несколькими выходами. Договоримся, что в логическом операторе p_i срабатывает верхний выход, если p_i выполнено, и нижний — в противном случае. Тогда логическая схема алгоритмов Ляпунова будет иметь вид:

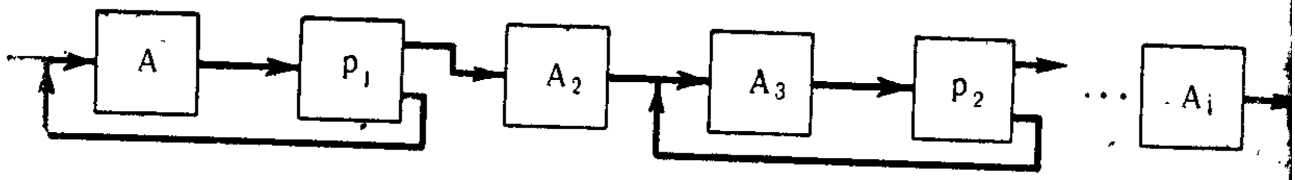


Рис. 1.

Нормальные алгорифмы Маркова также строятся по определенной схеме. Здесь тоже можно вычленить два типа операторов: арифметические — подстановки вместо одного вхождения другого, и логические — операторы, проверяющие, имеется ли первое данное вхождение в перерабатываемом слове. Если представить логические схемы нормальных алгорифмов А. А. Маркова блок-схемами, то они будут иметь такой вид:

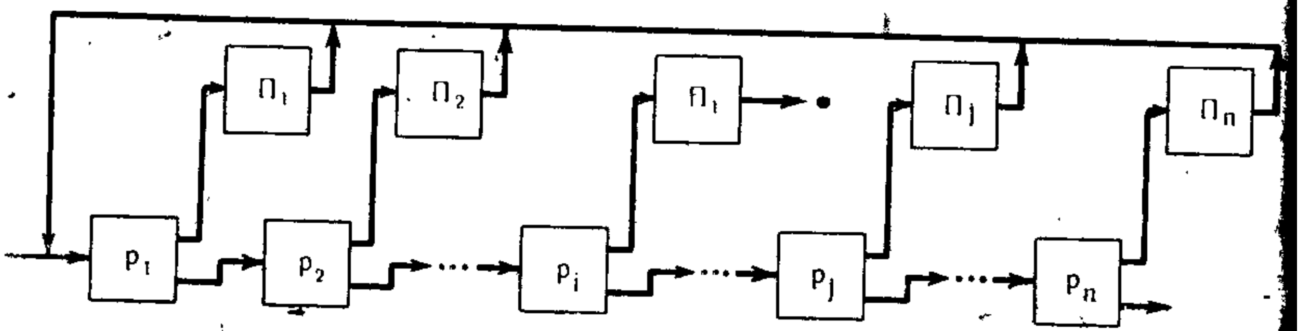


Рис. 2.

Сравнивая схемы алгоритмов Ляпунова со схемами нормальных алгорифмов Маркова, мы имеем:

В ляпуновских	В марковских
1. После срабатывания арифметического оператора управление передается следующему или процесс обрывается.	1. После срабатывания арифметического оператора управление передается первому условию или процесс обрывается.
2. Если выполняется логическое условие, то управление передается следующему оператору; если не	2. Если выполняется логическое условие, то управление передается связанному с этим условием ариф-

выполняется, то какому-то фиксированному.	метическому оператору, если не выполняется, то следующему логическому условию.

И в ляпуновских, и в марковских схемах алгоритмов имеется жесткий тип связи между операторами, причем в определенном смысле прямо противоположный. Сравнение ляпуновских и марковских схем алгоритмов ставит вопрос: будет ли корректной схема алгоритма, свободная от ограничений как ляпуновского, так и марковского типа. Мы имеем в виду схему, где управление с каждого оператора (арифметического и логического) передается не на фиксированный по своему месту оператор, а на любой другой, (ясно, что условие, согласно которому каждый выход связан лишь с одним входом, сохраняется).

В блок-схемах отсутствуют ограничения и марковского, и ляпуновского типа. Так блок-схема (рис. 3.) не является схемой алгоритма ни в смысле Маркова, ни в смысле Ляпунова.

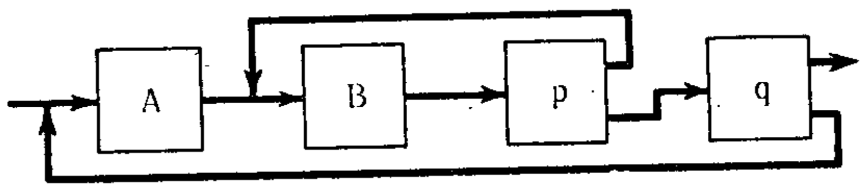


Рис. 3.

К необходимости рассмотреть схемы алгоритмов, свободные от определенных ограничений, приводит не только практика применения блок-схем в программировании. Чисто логический подход естественно приводит к логическим схемам алгоритмов без ограничений[2].

II. Логика до последнего времени изучает только специальные логические действия: операции над понятиями и высказываниями. Но объектом логики не являлись произвольные действия. Если логика оперирует такими категориями, как «свойство», «отношение», «объект»,

[2] Говоря, что на схемы алгоритмов Маркова и Ляпунова наложены ограничения, мы не имеем в виду, что нельзя любой алгоритм представить в этих схемах.

и соответствующими им логическими эквивалентами «одноместный предикат», «многоместный предикат», «индивидное постоянное», то действия как таковые не являются в явном виде объектом рассмотрения. Нам представляется, что такое положение должно быть изменено. При анализе высказывания мы можем операцию (действие) рассматривать как частный случай отношения или оперировать не с действиями, а лишь с результатами действий при рассмотрении терминов. Но введение действия как самостоятельной категории, не сводимой к другим, необходимо для анализа таких форм мысли, как предписание (повеление, императив)[3]. Под предписанием или алгоритмическим императивом мы будем понимать требование выполнить определенное действие[4]. Если φ — действие, то требование выполнить это действие мы будем записывать $\Rightarrow\varphi$. Помимо простых алгоритмических императивов имеются и условные. Под последними мы понимаем требование выполнить определенное действие, если выполняется определенное условие. Если условие (высказывание) обозначим p, то $p\Rightarrow\varphi$ будет условным алгоритмическим императивом.

Примером простого алгоритмического императива может служить «сложи число 2 с числом 3», условного — «если a больше b, то вычти b из a».

Абстрагируясь от области объектов действия и от природы действий, мы имеем с х е м у алгоритмических императивов.

Помимо элементарных, простых или условных, алгоритмических императивов мы можем иметь сложные алгоритмические императивы, т. е. требование выполнить некоторую последовательность действий. Введем строгое определение схемы алгоритмических императивов (с. а. и.).

A_1, A_2, —A_n — арифметические операторы,
p_1, p_2, —p_m — логические операторы,
$\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, —$\bar{p}_m$ — логические операторы.

Определим понятие «с т р о к а с х е м ы».

[3] Мы здесь не останавливаемся на анализе действия.

[4] Мы говорим не просто об императиве, а об алгоритмическом императиве, чтобы зафиксировать его отличие от мысли, предписывающей достигнуть определенного результата; последнюю мы называем целеполагающим императивом.

1. Если M и N — операторы, то $M \Rightarrow N$, $\Rightarrow N$, $N \Rightarrow \cdot$ — строки схемы.

Строку схемы типа $M \Rightarrow N$ (M и N не пустые) назовем нормальной, типа $\Rightarrow N$ — начальной, типа $N \Rightarrow \cdot$ — заключительной.

Оператор, стоящий слева строки, выполняет функцию условия. Слева может стоять как логический, так и арифметический оператор. В случае арифметического оператора он интерпретируется как высказывание «действие A_i выполнено». Справа может стоять также и логический оператор, он интерпретируется как алгоритмический императив «проверь условие P_i».

Неупорядоченное множество строк назовем **схемой алгоритмических императивов**, если выполняются следующие условия:

1) нет двух строк с одинаковыми левыми операторами;

2) арифметический оператор, стоящий справа, должен встречаться и в какой-то строке слева;

3) логический оператор, стоящий справа, должен встречаться в какой-то строке слева сам и в какой-то строке слева — его отрицание;

4) имеется одна и только одна начальная строка;

5) должна быть по крайней мере одна заключительная строка.

Примером с. а. и. может служить следующая система:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\Rightarrow A_1 \\
A_2 \Rightarrow p_1 \\
p_1 \Rightarrow A_1 \\
\bar{p}_1 \Rightarrow p_2 \\
p_2 \Rightarrow \cdot \\
\bar{p}_2 \Rightarrow A_2 \\
A_1 \Rightarrow A_2
\end{array}
\right.
$$

Этот пример удовлетворяет нашим требованиям: один и тот же оператор не встречается слева дважды, операторы, стоящие справа, встречаются и слева, причем логические в утвердительной и отрицательной формах и, наконец, есть единственная начальная строка и есть заключительная. От нашей записи легко перейти к блок-схеме. Для этого надо совместить левые операторы с правыми, причем $\Rightarrow M$ рассматривать как вход, а $N \Rightarrow \cdot$ — как выход. Наш пример тогда будет изображен:

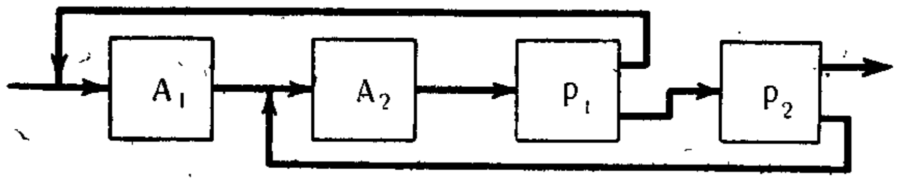


Рис. 4.

Выход сверху из $\boxed{p_i}\!\rightarrow$ при p_i, выход снизу из $\boxed{p_i}\!\rightarrow$ при $\bar{p}_i$.

Наоборот, легко перейти от произвольной блок-схемы с логическими и арифметическими операторами к с. а. и., при условии, что одноименные операторы, занимающие различное место в блок-схеме, будут рассматриваться как различные. Первое условие гарантируется тем, что каждый выход соединен только с одним входом; второе — тем, что каждый элемент блок-схемы, имеющий вход, имеет и выход, причем логические элементы — два выхода. Наконец, четвертое и пятое условия — тем, что вся схема имеет внешний вход и по крайней мере один внешний выход.

Схема нормального алгорифма А. А. Маркова есть схема алгоритмических императивов, удовлетворяющая определенным дополнительным условиям. Нормальный алгорифм А. А. Маркова — это упорядоченная последовательность формул подстановок

$$\begin{cases} A_1 \to B_1 \\ A_2 \to B_2 \\ \vdots \\ A_k \to B_k \end{cases}$$

Пусть p_i означает: «в слове имеется вхождение A_i», а C_i — «подставь вместо вхождения A_i вхождение B_i».

Алгорифм А. А. Маркова работает следующим образом.

1. Проверь, есть ли вхождение A_1, т. е. имеет ли место $p_1 : \Rightarrow, p_1$.

2. Если да, то выполни данную формулу подстановки, т. е. $p_1 \Rightarrow C_1$, и начни процесс с начала, т. е. $C_1 \Rightarrow p_1$.

3. Если нет, то проверь следующее условие и поступай аналогично, т. е. $p_i \Rightarrow C_i$ и $\bar{p}_i \Rightarrow p_{i+1}$.

Если p_k условие последней формулы и имеет место $\bar{p}_k$, то оборви процесс, т. е. $\bar{p}_k \Rightarrow \cdot$.

Процесс обрывается также, если имеются строки с точкой по выполнении подстановки, т. е. вместо $A_i \rightarrow \cdot B_i$ имеем $p_i \Rightarrow B_i$ и $B_i \Rightarrow$.

В результате любую схему нормальных алгорифмов Маркова мы можем записать на языке схем алгоритмических императивов.

Так перевод схемы алгорифма

$$\begin{cases} A_1 \rightarrow B_1 \\ A_2 \rightarrow \cdot B_2 \\ A_3 \rightarrow B_3 \end{cases}$$

выразится следующим образом:

$$\begin{cases} \quad\;\; \Rightarrow p_1 \\ p_1 \Rightarrow C_1 \\ p_2 \Rightarrow C_2 \\ p_3 \Rightarrow C_3 \\ \bar{p}_1 \Rightarrow p_2 \\ \bar{p}_2 \Rightarrow p_3 \\ \bar{p}_3 \Rightarrow \cdot \\ C_1 \Rightarrow p_1 \\ C_2 \Rightarrow \cdot \\ C_3 \Rightarrow p_1 \end{cases}$$

В результате можно сделать вывод, что схема нормального алгорифма Маркова есть схема алгоритмических императивов, удовлетворяющая следующим дополнительным условиям.

1. Если арифметический оператор стоит в левой части строки, то или правая часть пуста (заключительная строка) или в правой части стоит фиксированный логический оператор, эквивалентный правому оператору начальной строки (по выполнении арифметического оператора управление передается на p_1 или процесс обрывается).

2. Если в левой части стоит логический оператор без отрицания, то в правой — арифметический (если условие выполнено, то управление передается на арифметический оператор).

3. Если в левой части стоит логический оператор с отрицанием, то в правой стоит логический оператор без отрицания (если условие не выполнено, то управление передается на логический оператор).

Первое условие гарантирует переход после выполнения какой-либо подстановки к начальной строке. Третье условие определяет порядок применения формул подстановок, оно упорядочивает порядок логических операторов. Второе условие есть единственное условие, при котором управление передается на арифметический оператор.

Аналогично логические схемы алгоритмов Ляпунова являются схемами алгоритмических императивов, отвечающие дополнительным условиям.

Схема алгоритмов Ляпунова представляет собой последовательность логических и арифметических операторов. Порядок работы следующий: начиная слева, применяют оператор, по его выполнении следующий; если логическое условие не выполнено, то управление передается на оператор, перед которым стоит тот же индекс, что и при условии. Переход к алгоритмическим схемам прост: первый оператор с $\Rightarrow$ впереди образует первую строку, каждая последовательная пара операторов с $\Rightarrow$ между ними также образует строку, отрицание логического условия с соответствующим оператором, на который подается управление, также образуют строку, и, наконец, последний оператор с $\Rightarrow \cdot$ справа образует строку.

Пусть мы имеем логическую схему алгоритмов Ляпунова:

$$^{2\downarrow}A^{1\downarrow}Bp_{\downarrow 1}q_{\downarrow 2}DA$$

На языке схем алгоритмических императивов она будет изображена следующим образом (о д н о и м е н н ы е о п е р а т о р ы и н д е к с и р у е м):

$$\left\{\begin{array}{r}\Rightarrow A_1\\ A_1\Rightarrow B\\ B\Rightarrow p\\ p\Rightarrow q\\ q\Rightarrow D\\ D\Rightarrow A_2\\ A_2\Rightarrow \cdot\\ \bar{p}\Rightarrow B\\ \bar{q}\Rightarrow A_1\end{array}\right|$$

Логические схемы алгоритмов Ляпунова, изображенные в системах алгоритмических императивов, отвечают следующим дополнительным условиям.

1. Правые части множества строк с арифметическими или неотрицаемыми логическими условиями попарно различны (т. е. если отбросить строки с отрицаниями логических условий, то среди оставшихся строк не будет двух с одинаковыми правыми операторами).

Это условие вместе с первым условием определения с. а. и., согласно которому нет двух строк с одинаковыми левыми частями, дает возможность полностью упорядочить арифметические и логические операторы без отрицания.

2. Если слева стоит логическое условие с отрицанием, то справа стоит оператор, предшествующий (в смысле условия 1) логическому оператору.

Это условие обеспечивает, что цикл может быть осуществим только в левую сторону.

III. Рассмотрим некоторые возможные сочетания с. а. и.

Схемы алгоритмов будем обозначать большими готическими буквами с индексами. По имеющимся с. а. и., мы можем построить новые схемы, являющиеся также схемами алгоритмических императивов. Покажем, что композиция и разветвление с. а. и. также есть с. а. и. Каждую с. а. и. мы будем рассматривать как имеющую один вход и один выход (все возможные выходы соединяются в один).

Для двух с. а. и. $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ можно построить схему, являющуюся их композицией, т. е. сначала работает с. а. и. $\mathfrak{A}_i$, а к ее результату применяются с. а. и. $\mathfrak{A}_j$.

Другими словами, если $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ с. а. и., то

$$\left|\begin{array}{l} \Rightarrow \mathfrak{A}_i \\ \mathfrak{A}_i \Rightarrow \mathfrak{A}_j \\ \mathfrak{A}_j \Rightarrow \cdot \end{array}\right| \text{ с. а. и., являющаяся их композицией.}$$

Чтобы получить алгоритм с элементарными строками являющийся композицией, надо:

1. Поставить в соответствие одинаковым операторам в $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ новые (т. е. не встречающиеся ни в $\mathfrak{A}_i$, ни в $\mathfrak{A}_j$) логические операторы. Причем p_i и $\bar{p}_i$ будем считать за различные буквы; с ними сопоставляются разные операторы.

2. Заменить левые части $\mathfrak{A}_i$ отрицаниями новых букв, левые части $\mathfrak{A}_j$ — буквами.

3. Вместо точки заключительных строк $\mathfrak{A}_i$ поставить правую часть начальной строки $\mathfrak{A}_j$, начальную строку $\mathfrak{A}_j$ выбросить.

4. Добавить строки, где левыми частями будут операторы, встречающиеся в $\mathfrak{A}_i$ и в $\mathfrak{A}_j$, правыми — операторы, поставленные им в соответствие.

Пример. Пусть имеются две с. а. и.

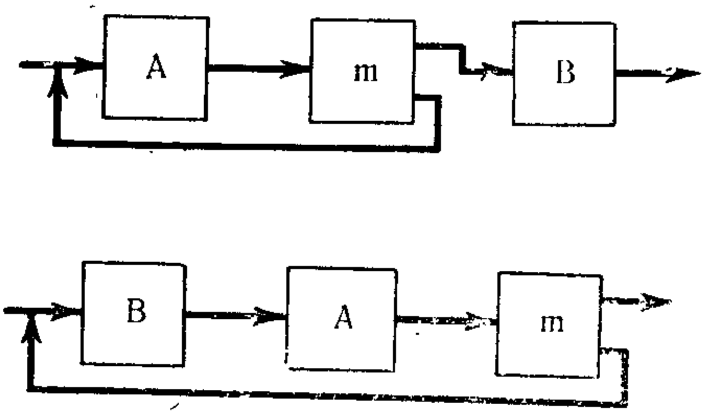


Рис. 5.

Построить их композицию.

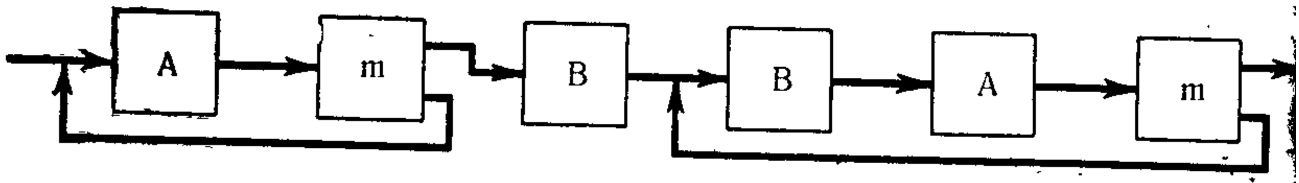


Рис. 6.

Используя правила построения композиции имеем:

$$\left|\begin{array}{r} \Rightarrow A \\ A \Rightarrow m \\ m \Rightarrow B \\ \bar{m} \Rightarrow A \\ B \Rightarrow \cdot \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{r} \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \\ A \Rightarrow m \\ m \Rightarrow \cdot \\ \bar{m} \Rightarrow B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} \Rightarrow A \\ A \Rightarrow n_1 \\ m \Rightarrow n_2 \\ \bar{m} \Rightarrow n_3 \\ B \Rightarrow n_4 \\ \bar{n}_1 \Rightarrow m \\ \bar{n}_2 \Rightarrow B \\ \bar{n}_3 \Rightarrow A \\ \bar{n}_4 \Rightarrow B \\ n_4 \Rightarrow A \\ n_1 \Rightarrow m \\ n_2 \Rightarrow \cdot \\ n_3 \Rightarrow B \end{array}\right|$$

Строки $A \Rightarrow n_1$, $\bar{n}_1 \Rightarrow m$, $n_1 \Rightarrow m$ мы можем заменить строкой $A \Rightarrow m$, так как

$$\left|\begin{array}{l} A \Rightarrow n_1 \\ \bar{n}_1 \Rightarrow m \\ n_1 \Rightarrow m \end{array}\right| = |A \Rightarrow m|$$

Тогда искомая композиция предстает в следующей блок-схеме:

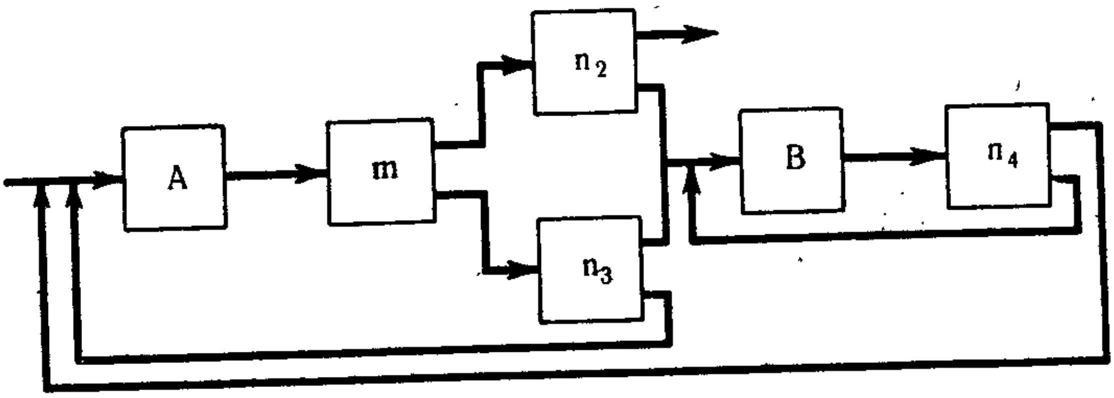


Рис. 7.

Как интерпретировать вновь введенные логические операторы n_2, n_3, n_4? Мы различаем операторы, чтобы отличить, например, строку $A \Rightarrow m$ первой и $A \Rightarrow m$ второй с. а. и.; дело в том, что в первой A применяется к результату B, во второй — к результату A. Операторы n_2, n_3, n_4 проверяют информацию о том, результат какого оператора перерабатывает данный оператор. В нашем случае:

$n_2(x) \equiv n_3(x) \equiv (x$ есть результат применения оператора A к результату оператора $B)$.

$n_4(x) = (x$ есть результат применения оператора $B)$.

Рассмотрим теперь такую операцию, как повторение алгоритма. Повторением мы называем предписание применять алгоритм до тех пор, пока результат не будет удовлетворять условию m. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгоритм. Тогда искомый алгоритм получится, если мы заменим точку буквой $\bar{m}$ и добавим строку $m \Rightarrow A_i$, где A_i — правая часть начальной строки $\mathfrak{A}$, и строку $m \Rightarrow$.

Например:

условие p

$$\left|\begin{array}{l} \Rightarrow A \\ A \Rightarrow m \\ m \Rightarrow B \\ \bar{m} \Rightarrow A \\ B \Rightarrow . \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} \Rightarrow A \\ A \Rightarrow m \\ m \Rightarrow B \\ \bar{m} \Rightarrow A \\ B \Rightarrow p \\ \bar{p} \Rightarrow A \\ p \Rightarrow . \end{array}\right|$$

Повторить алгоритм n-число раз (n-цикл).

Также подключим оператор p. Он работает следующим образом:

1. Ведет счет воздействиям.

2. На воздействие, кратное n, подает управление через верхнюю строку; в противном случае — через нижнюю.

Оператор цикла мы будем рассматривать как логический оператор. Тогда цикл сводится к повторению с условием.

Разветвление двух с. а. и. есть с. а. и.

Пусть p-условие, $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ с. а. и.

Имеется с. а. и. такая, что если p выполнено, то работает $\mathfrak{A}_i$ если выполнено $\bar{p}$, то $\mathfrak{A}_j$, т. е., по условию p и с. а. и. $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$, надо построить схему алгоритмического императива типа, изображенного на рис. 8. Разветвление символически будем записывать $p(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_j)$; на первом месте стоит запись алгоритма, работающего, если имеет место p, на втором месте — если, имеет место $\bar{p}$.

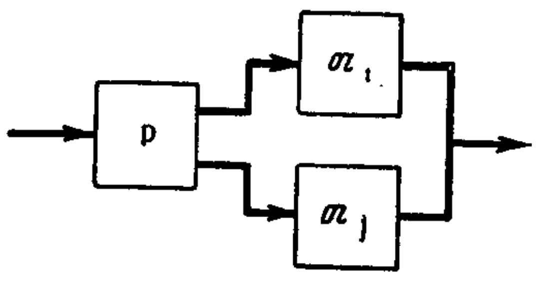


Рис. 8.

Схема алгоритмических императивов, являющаяся разветвлением с. а. и. по условию p, строится следующим образом.

Проводятся те же преобразования, которые сформулированы в 1, 2, 4 пунктах правил для образования композиции. Вместо пункта 3 выполняются следующие операции:

3′. Вместо пустого места начальной строки 1-й схемы ставится буква p (если она отлична от всех букв, входящих в оба алгоритма, если нет, то предварительно переименовывается), вместо начальной строки 2-й схемы — $\bar{p}$; затем добавляется строка: $\Rightarrow p$.

Покажем это на примере.

Пусть $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ имеют тот же вид, что и в примере построения композиции.

После переименований

$\mathfrak{A}_i$ будет иметь вид: $\mathfrak{A}_j$ будет иметь вид:

$$\left|\begin{array}{r} \Rightarrow A \\ \bar{n}_1 \Rightarrow m \\ \bar{n}_2 \Rightarrow B \\ \bar{n}_3 \Rightarrow A \\ \bar{n}_4 \Rightarrow . \end{array}\right| \quad (\mathrm{I}) \qquad \left|\begin{array}{r} \Rightarrow B \\ n_4 \Rightarrow A \\ n_1 \Rightarrow m \\ n_2 \Rightarrow . \\ n_3 \Rightarrow B \end{array}\right| \quad (\mathrm{II})$$

Согласно правилу 3′, вместо $\Rightarrow A$ имеем $p \Rightarrow A$, вместо $\Rightarrow B$ — $\bar{p} \Rightarrow B$. Искомая схема разветвления будет

$$\begin{array}{|r|l}
\Rightarrow p & \text{(согласно правилу 3}'\text{)} \\
\begin{array}{r} p \Rightarrow A \\ \bar{n}_1 \Rightarrow m \\ \bar{n}_2 \Rightarrow B \\ \bar{n}_3 \Rightarrow A \\ \bar{n}_4 \Rightarrow . \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{переименованный } \mathfrak{A}_i \text{ с заменой } \Rightarrow A \text{ на } p \Rightarrow A \\
\begin{array}{r} \bar{p} \Rightarrow B \\ n_4 \Rightarrow A \\ n_1 \Rightarrow m \\ n_2 \Rightarrow . \\ n_3 \Rightarrow B \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \text{переименованный } \mathfrak{A}_j \text{ с заменой } \Rightarrow B \text{ на } \bar{p} \Rightarrow B \\
\begin{array}{r} A \Rightarrow n_1 \\ m \Rightarrow n_2 \\ \bar{m} \Rightarrow n_3 \\ B \Rightarrow n_4 \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{l}\text{строки, определяющие переименование оди-} \\ \text{наковых операторов}\end{array}
\end{array}$$

Та же схема может быть представлена следующей блок-схемой:

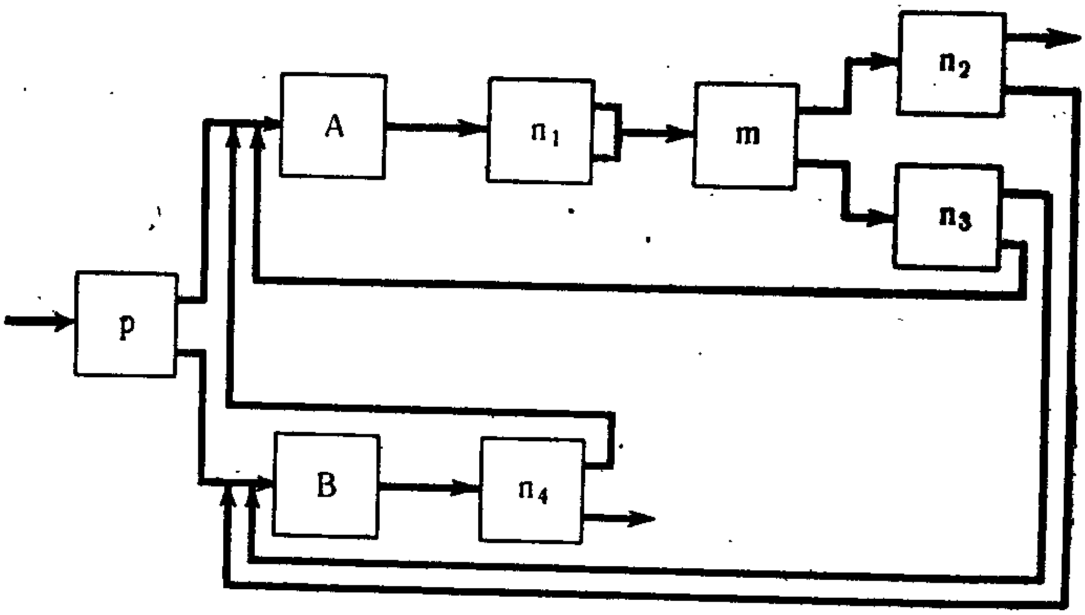


Рис. 9.

Очевидно, что не всякая с. а. и. может быть представлена или как композиция, или как разветвление, или как повторение с. а. и. (или как элементарная с. а. и.). Так, с. а. и., записанная на языке блок-схем, типа

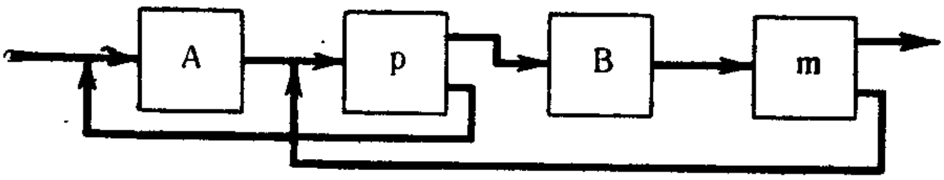


Рис. 10.

не может быть расчленена ни на композицию, ни на разветвление двух других с. а. и., ни рассмотрена как повторение.

Представляет интерес найти такие операции над с. а. и., чтобы каждая с. а. и. была или элементарной, или раскладывалась бы на элементарные при помощи этих операций. Тогда можно было бы дать на базе этих операций индуктивное определение с. а. и. Затем установить систему соотношений, которая позволяет аксиоматически ввести понятие эквивалентности с. а. и. В качестве примера можно привести соотношения: $(M \circ N) \circ K = M \circ (N \circ K)$ — ассоциативность композиции $p(M \circ K, N \circ K) = p(M, N) \circ K$ — дистрибутивность композиции относительно разветвления и т. д. ($\circ$ — знак композиции, $p(S, T)$ — запись разветвления).

Представляет интерес рассмотреть такие сочетания, как соединение одного из выходов $\mathfrak{A}$ с каким-либо $\mathfrak{B}$ — элементарная композиция $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ по выходу K на оператор Q; а также соединение одного из выходов $\mathfrak{A}$ с одним из операторов $\mathfrak{A}$ — замыканием $\mathfrak{A}$ по выходу K на оператор Q.

Встает задача найти такие способы сочетания с. а. и., чтобы при их помощи можно было построить из элементарных с. а. и. любые другие. Это дало бы возможность дать индуктивное определение с. а. и.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Марков. Теория алгорифмов. Труды Матем. ин-та АН СССР, т. 42, 1954.
2. А. А. Ляпунов. О логических схемах программ. Проблемы кибернетики, вып. 1, М., 1958.
3. Л. А. Калужнин. Об алгоритмизации математических задач. Проблемы кибернетики, вып. 2, М., 1959.
4. С. К. Клини. Введение в метаматематику. ИЛ, 1957.

В. А. Козмидиади

О МНОЖЕСТВАХ, РАЗРЕШИМЫХ И ПЕРЕЧИСЛИМЫХ АВТОМАТАМИ

В алгоритмической теории множеств важную роль играют понятия перечислимого и разрешимого множества натуральных чисел (или, в другой терминологии, рекурсивно-перечислимого и общерекурсивного множества). (См., например, [1, 2]). Множество называется перечислимым, если оно есть множество значений какой-либо вычислимой (т. е. частичнорекурсивной) функции. Оказывается, что запас непустых перечислимых множеств будет тем же самым, если рассматривать лишь множества значений всюду определенных вычислимых (т. е. общерекурсивных) функций. Множество называется разрешимым, если его характеристическая функция, т. е. функция, принимающая значение 1 на натуральных числах, принадлежащих рассматриваемому множеству, и значение 0 для остальных натуральных чисел, вычислима (т. е. общерекурсивна). Легко можно доказать, что каждое разрешимое множество — это такое перечислимое множество, которое имеет перечислимое дополнение. Классы как перечислимых, так и разрешимых множеств замкнуты относительно операций объединения и пересечения множеств. Одним из основных фактов алгоритмической теории множеств является существование перечислимого, но неразрешимого множества. т. е. такого перечислимого множества, дополнение которого неперечислимо.

Построение всей теории базируется на основополагающем понятии алгоритма, предполагающем отвлечение от ограниченности наших возможностей, наших средств, от ограниченности нашей жизни в пространстве и во времени, — абстракцию потенциальной осуществимости. Однако представляет интерес (в особенности в связи с развитием теории математических машин) рассмотрение таких ограничений общего понятия алгоритма, которые учитывают ограниченность наших средств. Одним из первых шагов в этом направлении может считаться изучение понятия автомата.

В настоящей работе рассматривается возможность построения теории, аналогичной алгоритмической теории множеств, но основанной на понятии автомата. При этом аналогом вычислимой (частичнорекурсивной) функции будет автомат с выходами. Выясняется, что не всякое множество, являющееся множеством значений отображения, определяемого некоторым автоматом, есть в то же время множество значений отображения, определяемого всюду определенным автоматом. Поэтому приходится рассматривать два понятия: конечноперечислимого множества — множества значений автомата, и сильноперечислимого множества — множества значений всюду определенного автомата.

Понятие множества, разрешимого автоматом, совпадает с ранее рассматривавшимся понятием представимого события. См. [3, 4].

Доказывается, что запасы конечноперечислимых и конечноразрешимых множеств совпадают. При этом переход от перечисляющего автомата к разрешающему, согласно приводимому доказательству, связан с экспоненциальным увеличением числа состояний автомата. Автору неизвестно[1], может ли эта оценка в общем случае быть понижена, однако В. А. Успенский высказал гипотезу, что существенно она понижена быть не может. В этом случае, т. е. если для каждого N найдется множество, перечислимое автоматом с N состояниями, но разрешимое лишь автоматом с $c_1 2^{c_2 n}$ состояниями, где c_1 и c_2 — некоторые константы, независящие от n, то некоторые из этих множеств можно считать уже практически неразрешимыми (а именно тогда, когда N — осуществимое число, а 2^N — уже неосуществимое число; см. по этому поводу [6]). В подобной «автоматной» теории множеств могут быть поставлены своеобразные проблемы разрешения при помощи автоматов. Автор видит близость

[1] Уже после написания статьи автору стало известно, что предположение В. А. Успенского было доказано (независимо друг от друга) Г. М. Карпелевич, О. Б. Лупановым и Ю. Л. Ершовым.

этой тематики к некоторым проблемам, анализируемым А. С. Есениным—Вольпиным в [6].

Далее в работе рассматривается понятие сильноперечислимого множества. Устанавливается, что существуют такие конечноразрешимые множества, которые не являются сильноперечислимыми. Класс сильноперечислимых множеств не замкнут относительно операции пересечения: пересечение двух сильноперечислимых множеств может уже не быть сильноперечислимым. Существует поэтому сильноперечислимое множество, дополнение к которому не сильноперечислимо.

В дальнейшем мы будем пользоваться результатами, изложенными в [5]. Всюду в дальнейшем $\Sigma=\{\sigma_1 \ldots, \sigma_m\}$ есть фиксированный алфавит, а T есть полугруппа слов в этом алфавите, элементы которой (т. е. слова в алфавите Σ) обозначаются через $t_1, \ldots, t_n, \ldots$

Определение 1. Автоматом (с выходами) называется совокупность $A=\langle S, M, s_0, F, O\rangle$, где

S — произвольное конечное множество $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$, называемое множеством внутренних состояний;

M — отображение $S \times \Sigma$ в S (матрица переходов);

s_0 — фиксированный элемент множества S, называемый исходным состоянием;

F — фиксированное подмножество S, называемое цензовым множеством;

O — отображение S в T.

Будем обозначать $O(s_i)$ через o_i и называть выходом в состоянии s_i.

Распространим M на все $S \times T$ так: $M(s_i, \lambda)=s_i$ (λ — пустое слово).

Если $M(s_i, t)=s$, то полагаем $M(s_i, t\sigma_j)=M(s, \sigma_j)$.

Пусть $t=\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_k}$ есть некоторый элемент полугруппы T. Будем представлять себе, что начиная с σ_{i_1} это слово побуквенно подается в автомат A, который в начальный момент находится в исходном состоянии s_0. Тогда матрица переходов M определит некоторую последовательность состояний $s_{j_1}, \ldots, s_{j_k}$, которую автомат A пройдет под воздействием входного слова t. Так как каждому состоянию автомата A сопоставлено некоторое выходное слово, то последовательности $s_{j_1}, \ldots, s_{j_k}$ естественным образом сопоставляется последовательность слов $o_{j_1}, \ldots, o_{j_k}$ и, следовательно, слову $t = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k}$ соответствует выходное слово $o_{j_1} \ldots o_{j_k}$.

Дадим теперь на этой основе формальное определение некоторых отображений.

1. Определим отображение γ слов из T в слова в алфавите S. Пусть $t \in T$ и равно $\sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k}$ $(k \geqslant 1)$. Положим

$$\gamma(t) = s_{j_1} \ldots s_{j_k},$$

где

$$s_{j_1} = M(s_0, \sigma_{i_1}),$$
$$s_{j_l} = M(s_{j_{l-1}}, \sigma_{i_l}), \quad (1 < l \leqslant k)$$
$$\gamma(\lambda) = \lambda. \quad (\lambda \text{ — пустое слово})$$

2. Определим отображение O слов в алфавите S в T.

$$O(\lambda) = \lambda$$

$$O(s_{j_1} \ldots s_{j_k}) = o_{j_1} \ldots o_{j_k} \quad (k \geqslant 1).$$

3. Определим частичное отображение $\mathfrak{A}$ T в T.

Пусть $t = \lambda$. Тогда $\mathfrak{A}(t) = \lambda$.

Пусть $t = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k}$ $(k \geqslant 1)$ и пусть $\gamma(t) = s_{j_1} \ldots s_{j_k}$. Тогда $\mathfrak{A}(t) = O(\gamma(t))$, если $s_{j_k} \in F$, и не определено в противном случае.

Определение 2. Множество значений отображения $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}(T)$, называется множеством, перечислимым автоматом A.

Определение 3. Автомат $A = \langle S, M, s_0, F, O \rangle$ называется бесцензурным, если $F = S$.

Определение 4. Подмножество $W \subseteq T$ называется конечноперечислимым, если существует такой автомат A, что W перечислимо автоматом A. В случае, когда для данного подмножества W существует бесцензурный автомат, перечисляющий его, это подмножество называется сильноперечислимым.

Определение 5. Подмножество $W \subseteq T$ называется конечноразрешимым, если существует такой автомат A, что $t \in W$ тогда и только тогда, когда $\gamma(t) = s_{j_1} \ldots s_{j_k}$ и $s_{j_k} \in F$, т. е. $M(s_0, t) \in F$.

Таким образом, множество, конечноразрешимое автоматом A, состоит из тех и только тех слов из T (т. е. входных слов), под действием которых автомат переходит из исходного состояния в одно из состояний, принадлежащих F. В дальнейшем такие слова будем называть цензурными относительно данного автомата. Заметим, что используемое нами понятие конечноразрешимости множества совпадает с понятием представимости события [3, 4]. Так как, однако, мы хотим рассматривать это понятие в рамках общей теории разрешимости и перечислимости, то мы решились изменить в данной статье уже введенный термин.

Теорема 1. Для того, чтобы подмножество $W \subseteq T$ было конечноперечислимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было конечноразрешимым.

1. Покажем, что из конечноразрешимости множества следует его конечноперечислимость. Пусть множество W конечноразрешимо автоматом $A = \langle S, M, s_0, F, O \rangle$. Построим автомат $A^* = \langle S^*, M^*, s_0^*, F^*, O^* \rangle$, такой, что множество W перечислимо автоматом A^*.

Пусть

$$S = \{s_0, \ldots, s_n\},$$

а

$$F = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\}.$$

Полагаем

$$S^* = \{s_0^{\sigma_1}, \ldots, s_0^{\sigma_m}, \ldots, s_n^{\sigma_1}, \ldots, s_n^{\sigma_m}\},$$

$$F^* = \{s_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, s_{i_1}^{\sigma_m}, \ldots, s_{i_k}^{\sigma_1}, \ldots, s_{i_k}^{\sigma_m}\},$$

$$s_0^* = s_0^{\sigma_1}.$$

M^* задается следующим образом: если $M(s_i, \sigma_j) = s_{\nu_{ij}}$, то при $1 \leqslant l \leqslant m$

$$M^*(\sigma_i, s_j^{\sigma_l}) = s_{\nu_{ij}}^{\sigma_i}.$$

O^* определяется так:

$$O^*(s_i^{\sigma_l}) = \sigma_l \quad (1 \leqslant l \leqslant m).$$

Нетрудно проверить, что A^* перечисляет W.

2. Покажем теперь, что конечноперечислимости множества следует его конечноразрешимость. Доказательство непосредственно следует из лемм 1—3.

Лемма 1. Для всякого конечноперечислимого множества найдется перечисляющий его автомат, выходы состояний которого не более чем однобуквенны.

Пусть W перечисляется автоматом $A=\langle S, M, s_0, F, O\rangle$. Определим перечисляющий W автомат A^* с не более чем однобуквенными выходами. Для каждого состояния s_i автомата A строим одно или несколько состояний автомата A^* следующим образом. Если $O(s_i)=\lambda$, то состоянию s_i сопоставляется единственное состояние автомата A^* — s_i^0. При этом

$$O^*(s_i^0)=\lambda.$$

Если $O(s_i)=\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_{k_i}}$ $(k_i \geqslant 1)$, то относим в S^* состояния $s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^{k_i}$.

При этом

$$O^*(s_i^l)=\sigma_{i_l} \quad (1 \leqslant l \leqslant k_i).$$

Задаем F^*: если $s_i \in F$, причем $O(s_i)=\lambda$, то $s_i^0 \in F^*$; если же $O(s_i)=\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_{k_i}}$ $(k_i \geqslant 1)$, то $s_i^{k_i} \in F^*$. Определяем M^*: $M^*(s_i^0, \sigma_j)=s_{\nu_{ij}}^{\varepsilon}$, если $M(s_i, \sigma_j)=s_{\nu_{ij}}$ и где

$$\varepsilon=\begin{cases} 0, \text{ если } O(s_{\nu_{ij}})=\lambda \\ 1, \text{ если } O(s_{\nu_{ij}})\neq\lambda \end{cases}$$

$M^*(s_i^{l-1})=s_i^l$ $(1 < l \leqslant k_i)$; $M^*(s_i^{k_i}, \sigma_j)=s_{\nu_{ij}}^{\varepsilon}$, если $M(s_i, \sigma_j)=s_{\nu_{ij}}$ и где

$$\varepsilon=\begin{cases} 0, \text{ если } O(s_{\nu_{ij}})=\lambda \\ 1, \text{ если } O(s_{\nu_{ij}})\neq\lambda. \end{cases}$$

Начальным состоянием автомата A^* объявляется s_0^0, если $O(s_0)=\lambda$, или s_0^1, если $O(s_0)\neq\lambda$.

Для формулировки следующей леммы нам потребуются некоторые определения, заимствованные из [5]. Рассмотрим полугруппу T слов в алфавите Σ. Пусть в T введено некоторое отношение эквивалентности $\sim$, разбивающее T на классы, число которых будем называть индексом данной эквивалентности. Если эквивалентность $\sim$ такова, что из $t_1 \sim t_2$ всегда следует $t_1t_3 \sim t_2t_3$ при всяком t_3, то эта эквивалентность называется правоинвариантной.

Лемма 2. Если множество $W \subseteq T$ таково, что существует некоторая правоинвариантная эквивалентность $\sim$ конечного индекса, причем из $t_1 \in W$ и $t_1 \sim t_2$ следует $t_2 \in W$, то множество W конечноразрешимо.

Для доказательства заметим прежде всего, что в условиях леммы W есть объединение некоторого числа классов эквивалентности. Автомат, разрешающий множеством W, строим следующим образом. Состояниями определяемого автомата объявляем классы эквивалентности; исходным состоянием объявляем тот класс, в который попадает пустое слово λ; цензовым множеством F объявляем множество тех классов, элементы которых входят в W; наконец, $M(s_i, \sigma_j)$ есть тот класс, который содержит всякое слово вида $t\sigma_j$, где $t \in s_i$ (однозначность определенного таким образом класса следует из правоинвариантности эквивалентности $\sim$). Покажем теперь, что построенный нами автомат действительно разрешает множество W. Действительно нетрудно проверить, что в силу $\lambda \in s_0$,

$$M(s_0, t) \in F$$

равносильно $\lambda t \in W$ или, что то же самое, $t \in W$.

Заметим, что лемма 2, а также и обратная ей, составляют одно из утверждений теоремы Нерода из [5].

Лемма 3. Если множество W перечислимо автоматом A с не более, чем однобуквенными выходными словами, то это множество конечноразрешимо.

Для доказательства леммы мы введем некоторую правоинвариантную эквивалентность конечного индекса, удовлетворяющую условиям леммы 2.

Каждому слову t сопоставим подмножество $S_t \subseteq S$ состояний автомата A следующим образом: состояние s_i входит в S_t тогда и только тогда, когда существует входное слово t' такое, что $O(\gamma(t')) = t$ и $M(s_0, t') = s_i$.

Определим нужную нам эквивалентность: $t_1 \sim t_2$ тогда и только тогда, когда $S_{t_1} = S_{t_2}$. То, что введенное нами отношение есть отношение эквивалентности, проверяется без труда. Покажем, что эта эквивалентность правоинвариантна и имеет конечный индекс.

Пусть $t_1 \sim t_2$, т. е. $S_{t_1} = S_{t_2}$. Если S_{t_1} пусто, то пусто и $S_{t_1 t_3}$ для всякого $t_3 \in T$. Это утверждение следует из того обстоятельства, что пустота множества S_t равносильна несуществованию такого входного слова t', что

$$O(\gamma(t')) = t.$$

Принимая во внимание, что все выходные слова автомата A не более чем однобуквенны, мы легко получаем из последнего, что ни для какого $\hat{t}$ — продолжения слова t — не существует такого слова $\hat{t}'$, что

$$O(\gamma(\hat{t}')) = \hat{t}.$$

Итак, в рассматриваемом случае $t_1 t_3 \sim t_2 t_3$ для всякого $t_3 \in T$. Пусть теперь $S_{t_1} = S_{t_2} \neq \varnothing$. Фиксируем некоторое $t_3 \in T$. Предположим, что $s \in S_{t_1 t_3}$. Это значит, что найдется такое слово t', что

$$O(\gamma(t')) = t_1 t_3$$

и

$$M(s_0, t') = s.$$

Тогда, как нетрудно видеть, из не более чем однобуквенности выходных слов автомата A следует, что t' можно представить в виде $t' = t'_1 t'_3$ таким образом, что

$$O(\gamma(t'_1)) = t_1,$$

$$O(\gamma(t'_3)) = t_3.$$

Но тогда

$$M(s_0, t'_1) = s_i \in S_{t_1},$$

а так как

$$S_{t_1} = S_{t_2},$$

то найдется такое t'_2, для которого

$$O(\gamma(t'_2)) = t_2$$

и

$$M(s_0, t'_2) = s_i.$$

Отсюда следует, что

$$M(s_0,\ t_2't_3') = s$$

и

$$O(\gamma(t_2't_3')) = t_2t_3,$$

т. е.

$$s \in S_{t_2t_3}.$$

Итак, доказано, что

$$S_{t_1t_3} \subseteq S_{t_2t_3}.$$

Так как обратное включение доказывается аналогично, то доказано, что

$$S_{t_1t_3} = S_{t_2t_3},$$

т. е., что

$$t_1t_3 \sim t_2t_3.$$

Конечность индекса эквивалентности $\sim$ следует из того, что каждый класс эквивалентности задается некоторым подмножеством множества S - состояний автомата A, число же последних равно 2^n, где n — число состояний автомата A.

Нетрудно видеть, что

$$t \in W$$

равносильно

$$S_t \cap F \neq \varnothing,$$

т. е. W есть объединение каких-то классов эквивалентности.

Доказательство леммы 3, а с нею и теоремы 1, закончено.

Теорема 2. Существует конечноразрешимое, но не сильноперечислимое множество.

Примером такого множества, может служить $W = \{\sigma_1\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_0\sigma_1,\ \sigma_1\sigma_0\sigma_0\sigma_1, \ldots,\ \sigma_1\sigma_0 \ldots \sigma_0\sigma_1, \ldots\}$. Множество это разрешимо, например, таким автоматом (см. рис. 1).

Предположим, что это множество перечисляется некоторым бесцензурным автоматом A. Так как этот автомат должен перечислить бесконечное число слов, имея, лишь конечное число выходных слов O_i, то найдется такое $t \in W$, собственное начало t' которого $(t = t't''$, $t'' \neq \lambda)$, также принадлежит W, что невозможно.

Известно, что класс конечноразрешимых множеств, а следовательно, и конечноперечислимых множеств замкнут относительно операций объединения и пересечения множеств. Это, однако, неверно в отношении

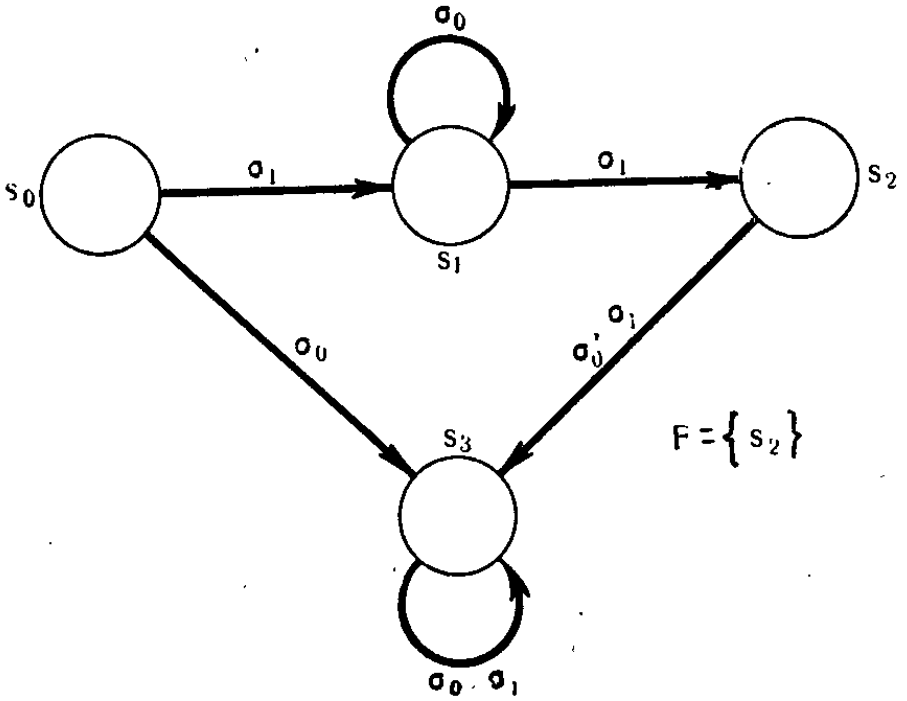


Рис. 1.

сильноперечислимых множеств. Нетрудно доказать что, объединение сильноперечислимых множеств есть множество сильноперечислимое, пересечение же сильноперечислимых множеств может не быть сильноперечислимым множеством, что подтверждается приводимым ниже примером.

Рассмотрим множества

$$W_1 = \{\sigma_1 \underbrace{\sigma_0\sigma_0 \ldots \sigma_0}_{2n \text{ раз}},\ \sigma_1 \underbrace{\sigma_0\sigma_0 \ldots \sigma_0}_{2n+3 \text{ раза}} \sigma_1\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$W_2 = \{\sigma_1 \underbrace{\sigma_0\sigma_0 \ldots \sigma_0}_{2n+1 \text{ раз}},\ \sigma_1 \underbrace{\sigma_0\sigma_0 \ldots \sigma_0}_{2n+3 \text{ раза}} \sigma_1\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Эти множества сильно перечисляются соответственно автоматами A_1 и A_2, изображенными на рис. 2. Пересечение этих множеств—

$$W_1 \cap W_2 = \{\sigma_1 \underbrace{\sigma_0\sigma_0 \ldots \sigma_0}_{2n+3 \text{ раза}} \sigma_1\} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), —$$

как легко убедиться, не является сильноперечислимым множеством. Отсюда следует, что дополнение сильноперечислимого множества может не быть сильноперечислимым. Действительно, если бы операция перехода к дополнению сохраняла сильноперечислимость, то, выражая пересечение через сумму и дополнение, мы получили бы, что и пересечение сохраняет сильноперечислимость, а это, как мы видели, неверно. Примером

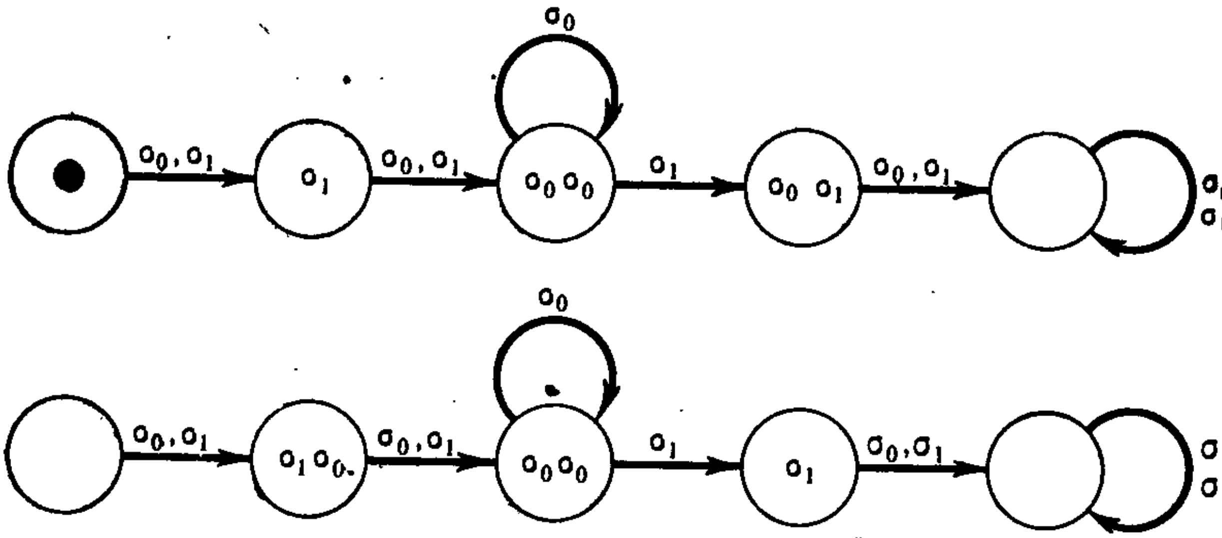


Рис. 2.

множества сильноперечислимого, дополнение которого не сильноперечислимо, может служить множество, дополнительное к множеству W из теоремы 2.

Существуют также множества, которые сильноперечислимы и имеют сильноперечислимое дополнение.

Рассмотрим автомат $A = \langle S, M, s_0, F, O \rangle$. Этот автомат задает предикат $A(t)$, определенный на словах из полугруппы T следующим образом:

$A(t)$ истинен тогда и только тогда, если $M(s_0, t) \in F$. Как нетрудно видеть, множество истинности этого предиката есть множество, разрешимое автоматом A.

Предикат, определенный на словах из полугруппы T, для которого существует автомат, его задающий, мы будет называть автоматным.

Теорема 3

Пусть $A_1(t)$ и $A_2(t)$ — автоматные предикаты. Тогда

1. $A_1(t) \& A_2(t)$
2. $A_1(t) \vee A_2(t)$
3. $A_1(t) \supset A_2(t)$ — автоматные предикаты.

Пусть $A(t)$ — автоматный предикат. Тогда

4. $\neg A(t)$
5a. $\exists x A(xt)$
5b. $\exists x A(tx)$
6a. $\forall x A(xt)$
6b. $\forall x A(tx)$ — автоматные предикаты

(x — переменная, область допустимых значений которой есть вся полугруппа T).

Приведем доказательства для случаев 1, 4, 5a, 5b. Доказательства для остальных случаев следуют из общеизвестных эквивалентностей.

1. Пусть $A_1 = \langle S_1, M_1, s_0^1, F_1, O_1 \rangle$, где $S_1 = \{s_0^1, s_1^1, \ldots, s_{n_1-1}^1\}$; $A_2 = \langle S_2, M_2^{\bullet}, s_0^2, F_2, O_2 \rangle$, где $S_2 = \{s_0^2, s_1^2, \ldots, s_{n_2-1}^2\}$. Строим автомат $A = \langle S, M, s_0, F, O \rangle$, задающий предикат $A_1(t) \,\&\, A_2(t)$ так:

$$S = \{s_0^1 s_0^2, s_0^1 s_1^2, \ldots, s_0^1 s_{n_2-1}^2, s_1^1 s_0^2, s_1^1 s_1^2, \ldots,$$
$$s_1^1 s_{n_2-1}^2, \ldots, s_{n_1-1}^1 s_0^2, s_{n_1-1}^1 s_1^2, \ldots, s_{n_1-1}^1 s_{n_2-1}^2\}.$$

Матрицу переходов M определяем следующим образом: $M(s_i^1 s_j^2, \sigma_k) = M_1(s_i^1, \sigma_k)\, M_2(s_j^2, \sigma_k)$, $0 \leqslant i < n_1$, $0 \leqslant j < n_2$;

$$s_0 = s_0^1 s_0^2.$$

F определяется так: $s_i^1 s_j^2 \in F$ тогда и только тогда, если $s_i^1 \in F_1$, а $s_j^2 \in F_2$. Отображение O можно задать произвольно, например, так: $O(s_i^1 s_j^2) = \lambda$ $(0 \leqslant i < n_1,\ 0 \leqslant j < n_2)$,

4. Пусть $A = \langle S, M, s_0, F, O \rangle$. Тогда автомат $\bar{A} = \langle S, M, s_0, S \setminus F, O \rangle$ задает предикат $\neg A(t)$.

5a. Пусть $A = \langle S, M, s_0, F, O \rangle$, где $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Строим автомат $A^* = \langle S^*, M^*, s_0^*, F^*, O^* \rangle$, задающий предикат $\exists x A(xt)$.

Состояние s автомата A называется достижимым если $s = s_0$, или если существует такое непустое слово , из полугруппы T, что $M(s_0, t) = s$. Пусть $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r}$ — все достижимые состояния автомата (очевидно, $r \leqslant n$).

Полагаем $S^* = \{\underbrace{s_0s_0 \ldots s_0s_0}_{r \text{ символов}}, \underbrace{s_0s_0 \ldots s_0s_1}_{r \text{ символов}}, \underbrace{s_0s_0 \ldots s_0s_2}_{r \text{ символов}}, \ldots$

$$\ldots, \underbrace{s_0s_0 \ldots s_0s_{n-1}}_{r \text{ символов}}, \underbrace{s_0s_0 \ldots s_0s_1s_0}_{r \text{ символов}}, \underbrace{s_0s_0 \ldots s_0s_1s_1}_{r \text{ символов}}, \ldots$$

$$\ldots, \underbrace{s_0s_0 \ldots s_0s_1s_{n-1}}_{r \text{ символов}}, \ldots, \underbrace{s_{n-1}s_{n-1} \ldots s_{n-1}}_{r \text{ символов}}\}.$$

Итак, S^* состоит из всевозможных r-буквенных слов в алфавите $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Таких слов n^r.

M^* определяем так:

$$M^*(s_{j_1}s_{j_2} \ldots s_{j_r}, \sigma_k) = M(s_{j_1}, \sigma_k)\, M(s_{j_2}, \sigma_k) \ldots M(s_{j_r}, \sigma_k)$$

$$0 \leqslant j_1, j_2, \ldots, j_r < n;$$

$$s_0^* = s_{i_1}s_{i_2} \ldots s_{i_r}.$$

F^* определяется так:

$$s_{j_1}s_{j_2} \ldots s_{j_r} \in F^* \quad (j_1, j_2, \ldots, j_r = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

тогда и только тогда, если хотя бы одно s_{j_l} $(1 \leqslant l \leqslant r)$ таково, что $s_{j_l} \in F$.

Задание O^* несущественно; можно, скажем, положить

$$O^*(s_{j_1}s_{j_2} \ldots s_{j_r}) = \lambda \quad (0 \leqslant j_1, j_2, \ldots, j_r < n).$$

Покажем, что автомат A^* задает предикат $\exists x A(xt)$. Пусть, например, $A^*(t)$. Это значит, что $M^*(s_0^*, t) = M^*(s_{i_1}s_{i_2} \ldots s_{i_r}, t) = M(s_{i_1}, t)\, M(s_{i_2}, t) \ldots M(s_{i_r}, t) \in F^*$, т. е. найдется такое s_{i_l}, что $M(s_{i_l}, t) \in F$. Но по определению автомата A^* состояние s_{i_l} автомата A достижимое. Поэтому найдется такое $t' \in T$, что $M(s_0, t') = s_{i_l}$. Но тогда $M(s_0, t't) = M(s_{i_l}, t) \in F$.

Итак, слово $t't$ таково, что $M(s_0, t't) \in F$, т. е. $A(t't)$. Но это значит, что $\exists x A(xT)$, причем роль искомого x играет найденное выше t'. Доказано, что $A^*(t) \supset \exists x A(xt)$. Положим теперь, что $\exists x A(xt)$. Пусть $t' \in T$ таково, что $A(t't)$.

Состояние $M(s_0, t')$ достижимое. Поэтому это состояние найдется среди состояний $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r}$. Пусть это состояние — s_{i_l}.

В таком случае

$$M^*(s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l} \dots s_{i_r}, t) = M(s_{i_1}, t) M(s_{i_2}, t) \dots$$
$$\dots M(s_{i_l}, t) \dots M(s_{i_r}, t) \in F^*,$$

так как $M(s_{i_l}, t) = M(s_0, t't) \in F$. Таким образом $A^*(t)$. Доказана обратная импликация $\exists x A(xt) \supset A^*(t)$. Итак, автомат A^* задаёт предикат $\exists x A(xt)$, так как $A^*(t) \equiv \equiv \exists x A(xt)$.

5b. Пусть $A = \langle S, M, s_0, F, O \rangle$, где $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$. Строим автомат $A^{**} = \langle S^{**}, M^{**}, s_0^{**}, F^{**}, O^{**} \rangle$, задающий предикат $\exists x A(tx)$, так:

$$S^{**} = S; \quad M^{**} = M; \quad s_0^{**} = s_0; \quad O^{**} = O.$$

$s_i \in F^{**}$ тогда и только тогда, если $s_i \in F$ или если найдется такое непустое слово $t \in T$, что $M(s_i, t) \in F$ $(0 \leqslant i < n)$. Как легко видеть, автомат A^{**} действительно задает предикат $\exists x A(tx)$.

Таким образом, как следует из теоремы 3, исходя из автоматных предикатов, не удается построить иерархию предикатов, аналогичную иерархии предикатов Клини—Мостовского, так как квантификация автоматных предикатов дает снова автоматные предикаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. К. Клини. Введение в метаматематику. ИЛ, 1957.
2. В. А. Успенский. Лекции о вычислимых функциях. Физматгиз, 1960.
3. С. К. Клини. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. Сб. «Автоматы», ИЛ, 1956.
4. Ю. Т. Медведев. О классе событий, допускающих представление в конечном автомате. Сб. «Автоматы», стр. 383—401.
5. M. Rabin, D. Scott. Finite automata and their decision problem. JBM J. Res. and Development, 1959, vol. 3, N 2, p. 114—125.
6. А. С. Есенин-Вольпин. Анализ потенциальной осуществимости. В кн.: Логические исследования. Изд-во АН СССР, 1959.

С. А. Яновская

ПРЕОДОЛЕНЫ ЛИ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ ТРУДНОСТИ, ИЗВЕСТНЫЕ ПОД НАЗВАНИЕМ «АПОРИЙ ЗЕНОНА»?

1. О Зеноне Элейском и его парадоксах, таких, например, как известная загадка про быстроногого Ахиллеса, который не может догнать черепаху, казалось бы, написано уже так много, что вряд ли еще раз требуется возвращаться к сформулированным им еще в V в. до н. э. «трудным вопросам» (апориям), относящимся к отображению движения в науке и к понятию «множества» (к соотношению непрерывного и дискретного). С тех пор апории Зенона не переставали интересовать математиков и философов. Однако вплоть до наших дней на их счет существуют самые разнообразные мнения: от совершенно пренебрежительного отношения к ним до признания того, что они относятся к наиболее важным и трудным вопросам обоснования математики и физики.

Так, известному французскому математику Полю Леви парадокс об Ахиллесе и черепахе представляется очевидной нелепостью. «Почему воображать себе, — пишет он, — что время остановит свой ход вследствие того, что некий философ занимается перечислением членов сходящегося ряда?» „Признаюсь, я никогда не понимал, как люди, в других отношениях вполне разумные, могут оказаться смущенными этим парадоксом, и ответ, который я только что наметил, есть тот самый ответ, который я дал, когда мне было одиннадцать лет, старшему, рассказавшему мне этот парадокс, или, точнее, есть тот самый ответ, который я резюмировал тогда такой немногословной формулой: «Этот грек был идиотом». Я знаю теперь, что нужно выражать свои мысли в более вежливой форме и что, быть может, Зенон излагал свои парадоксы только для того, чтобы проверить разумность своих учеников. Но мое удивление перед умами, смущаемыми понятием сходящегося ряда, осталось тем же"[1] (примечания даны в конце статьи).

Вместе с тем, например, в книге известного специалиста по основаниям теории множеств А. Френкеля (написанной в сотрудничестве с Бар-Хиллелом) мы читаем: «В ходе дискуссий, происходивших в последние десятилетия, все более и более выяснялось, сколь тесна связь между современными трудностями и теми, которые уже дважды представлялись преодоленными,— именно загадками пифагорейской и элейской школ и трудностями, которые возникли во французском и германском центрах теории функций. Хотя аргументы изменились, но пропасть между дискретным и непрерывным опять является слабым местом, вечной точкой наименьшего сопротивления и в то же время исключительной научной важности в математике, философии и даже физике»[2].

Как же в действительности обстоит теперь дело с апориями Зенона? Вопрос этот представляется для нас тем более интересным, что он связан с основными положениями материалистической диалектики: с проблемами отображения движения в науке.

История «трудных вопросов» Зенона интересна и тем, что она относится к «началам» науки. И при том к «началам» в обоих смыслах этого слова: а) к истории возникновения основных исходных («начальных») понятий точной науки, таких, как «тело», его «место», «точка», «отрезок», «промежуток времени», «момент», «движение», «покой», «множество», его «элемент» и его «мера», «число», «конечное и бесконечное» (множества), и многие другие; б) к истории дискуссий, связанных с уточнением роли и смысла тех понятий науки, которые в ней являются исходными (неопределяемыми), — дискуссий, связанных с обоснованием «начал» науки.

Уже из этого ясно, однако, что написать историю апорий Зенона — трудная задача, на решение которой настоящая заметка заведомо не может претендовать. Автору хотелось бы только высказать некоторые соображения по поводу этих апорий, связанные с предлагаемым им ответом на поставленный в заголовке статьи вопрос.

2. Трудности, с которыми встречается всякий интересующийся историей апорий Зенона, состоят уже в том,

что в нашем распоряжении имеются лишь очень скудные источники информации о них. Эти апории дошли до нас только через комментаторов и критиков, прежде всего через Аристотеля, критикующего их в своей «Физике» (через 100 лет после их появления), и через комментарий Симпликия к «Физике» Аристотеля (написанный почти через тысячу лет после Зенона). И притом дошли в виде очень кратких отрывков. Поэтому трудно судить о том, какие из различных предложенных реконструкций аргументов Зенона (и в какой мере) могут считаться исторически оправданными. Неясность имеется даже в вопросе о том, что именно хотел доказать или опровергнуть Зенон.

Большинство историков философии полагает, что апории должны были доказать невозможность движения и существования «многого», с целью отстоять таким образом философию элеата Парменида — учителя и старшего друга Зенона. В диалоге Платона «Парменид» (128 *А* — *В*) эту точку зрения высказывает молодой Сократ, который упрекает Зенона в том, что тот обманывает слушателей, делая вид, что говорит нечто новое, между тем как в действительности, если один утверждает бытие Единого, а другой небытие Многого, то оба говорят одно и то же. Зенон, однако, возражает против такой трактовки цели его апорий (там же, *С* — *D*). Он говорит, что его задачей было показать, что во взглядах противников Парменида во всяком случае не меньше противоречий, чем во взглядах самого Парменида, согласно которым действительный мир (в отличие от преходящих иллюзий чувств) един, неделим и недвижим.

Вопрос о том, против кого именно выступал Зенон, в литературе не получил однозначного решения. Известный французский историк математики П. Таннери считает, что Зенон имел в виду пифагорейцев. Другие исследователи называют современника Зенона Анаксагора или ионийца Гераклита. То обстоятельство, что еще в древности элейцев называли «афизиками», т. е. врагами точной науки («физики»)[3], заставляет думать, что Зенон направлял свою критику против всех существовавших в его время научных теорий движения и «многого».

Как известно, в ту пору пифагорейцы уже обнаружили несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной, т. е. доказали несовместимость предположения о существовании точного квадрата (или, что то же самое, о существовании идеальных циркуля и линейки) с представлением всякого отрезка в виде суммы конечного числа «неделимых» (отрезков) одной и той же (отличной от нуля) величины; Анаксагор же настаивал на том, что никаких «неделимых» (в том числе и нулевой величины) не существует («Среди малых величин не существует наименьшей, но уменьшение идет непрерывно; ибо существующее ‹в результате деления› не может перестать существовать» [4]). Из дошедших до нас апорий Зенона ясно также, что в его времена существовали уже и теории, согласно которым конечные величины должны были состоять из бесконечного множества лишенных величины «неделимых» (точек, моментов). (По Аристотелю, — согласно пифагорейцам — «точка есть единица, имеющая положение». Это, по-видимому, можно трактовать как означающее «имеющая ‹только› положение, ‹но не имеющая величины›», так как «... уже во всяком случае единицы не имеют величины» (Аристотель, Метафизика, XIII, 1083 в.)). Зенон, таким образом, действительно мог уже иметь дело с основами всех теорий, относящихся к соотношению непрерывного и дискретного и к пониманию движения, которые занимали древнегреческих математиков и философов на всем протяжении истории их наук в античности.

3. О впечатлении, которое произвели апории Зенона, можно судить уже по тому, что, по свидетельству Диогена Лаэрция и Секста Эмпирика, Аристотель называл Зенона Элейского «основателем диалектики» и что вместе с тем он писал об элеатах: «Все это, по-видимому, логично, но на практике такой взгляд сходен с помешательством» («О рождении и гибели» 1, 8, 325 а). Начиная с Аристотеля, Плутарха и Сенеки вплоть до наших дней аргументы Зенона порождают все новые и новые попытки их опровержения (в этой связи я могу назвать, например, интересные статьи К. Айдукевича, А. Грюнбаума, С. Шираиши, относящиеся к самому последнему времени) [5]. Вместе с тем у ряда философов аргументы Зенона встречали высокую оценку. В духе этих аргументов составлены знаменитые антиномии Канта о конечности или бесконечности мира в пространстве и времени, о делимости или неделимости субстанции. Гегель видел в Зеноне

«родоначальника диалектики», понимаемой уже не в аристотелевском смысле этого слова. Руководствуясь желанием преодолеть аргументы Зенона, Бергсон построил свою философию интуитивизма, в которой время не состоит из моментов, а промежуток времени не имеет четких границ. Мы уже привели в начале статьи пример таких, все более и более частых и убедительных, замечаний философов и специалистов по основаниям математики; эти замечания свидетельствуют о том, что трудности, нашедшие отражение в апориях Зенона, и в наши дни нельзя считать преодоленными.

4. По сведениям историков философии, существовало 45 апорий Зенона, из которых до нас дошли только 9. Поскольку задача адекватной реконструкции содержания апорий не представляется еще однозначно разрешимой, трудно оспаривать даже такие попытки истолковать их, при которых они превращаются в очевидные нелепости, например в утверждения о том, будто Зенон считал, что, складывая половину отрезка с половиной оставшейся его половины и продолжая этот процесс прибавления половины оставшейся части отрезка все снова и снова, мы должны будем не только выйти когда-нибудь за пределы нашего отрезка, но даже получить «отрезок» бесконечной длины, поскольку-де всякая сумма неограниченно большого числа «любых, хотя бы и чрезвычайно малых, протяженных величин обязательно должна быть бесконечно большой»[6]. Подобное опровержение апорий Зенона не решает, однако, действительных трудностей, связанных с той проблематикой, к которой они — и история порожденных ими дискуссий — относятся. На таких истолкованиях мы поэтому позволим себе не останавливаться долго.

Дошедшие до нас апории Зенона подразделяются на две группы: в одних «опровергается» существование «многого», причем «многое» понимается как актуально существующее: заданное всем набором своих элементов, т. е. как некоторая полная, завершенная совокупность, а не как «одноместный предикат» (свойство), удовлетворяющий определенным требованиям (как это делается в основных современных логико-математических теориях); в других вскрываются противоречия, связанные с отображением движения в логике понятий. Те и другие, однако, тесно связаны между собой.

5. К апориям первой группы относятся, прежде всего, аргументы, опровергающие существование «многого» на том основании, что «если их <существующих вещей> много, то их должно быть столь много, сколько их есть, — не больше и не меньше. А если их столь много, сколько их есть, то их <число> ограниченно. <Но> если существующих <вещей> много, то их <число> неограниченно, ибо всегда существуют другие <вещи> между существующими „вещами" и снова другие между теми. И так <число> существующих „вещей" неограниченно»[7]. (Любая часть промежутка между вещами здесь, очевидно, также считается вещью)[8].

В основе полученного здесь противоречия (что если в мире есть много вещей, то число их должно быть одновременно и конечным и бесконечным) лежит утверждение, что количество вещей в актуально завершенном множестве их должно быть «ограниченным» (конечным). Как известно, Г. Кантором в 70-х годах прошлого века были введены в математику бесконечные кардинальные (т. е. количественные) числа, или мощности. При их помощи, казалось бы, полностью разрешается приведенная выше апория. Неконструктивный характер канторовских актуально-бесконечных множеств (и соответствующих им чисел) сделал их, однако, неприемлемыми для представителей современных конструктивных направлений в математике. (К числу последних относится, прежде всего, советская школа А. А. Маркова. Как известно, актуально бесконечные множества Кантора были подвергнуты резкой критике голландским математиком Брауэром, возглавляющим созданное им интуиционистское направление в математике).

Аристотель («Физика», IV, 1, 209а) приводит еще одну апорию Зенона этого же рода: «именно если все существующее помещается в известном месте, то ясно, что будет и место места, и так идет в бесконечность». С этой апорией Аристотель справляется, замечая, что место само есть уже не вещь, которая нуждается в некотором «месте», а нечто, аналогичное тому или иному состоянию вещи, наподобие того, как одна и та же вещь может быть и теплой и холодной. Он не возражает, однако, против понятия о «месте места», но трактует последнее не как «место», т. е. не как состояние, а как нечто аналогичное свойству данного состояния, — как, например, теплое (состояние) обладает свойством «быть полезным для здоровья», — почему вопрос о «месте места места» уже не возникает с необходимостью. «Таким образом, нет необходимости идти в бесконечность» («Физика», IV, 3, 210 в). Однако рассуждения, аналогичные использованному здесь Зеноном, встречаются и в современных основаниях математики, когда идущий в бесконечность натуральный ряд чисел порождается из «ничего» (из пустого множества) посредством того, что сначала рассматривается пустое множество: затем множество {O}, единственным элементом которого является пустое множество; далее множество {O, {O}}, элементами которого являются O и {O}, и т. д. А возражения, которые выдвигаются против этой процедуры в наши дни, — например, современными номиналистами (Куайн, Гудмен), — родственны возражениям Аристотеля, состоящим в том, что «место места» само не есть «место», поскольку они основаны на том, что нельзя и мысленно объединить в множество вещи, которые не существуют раздельно друг от друга (так, нельзя рассматривать как особый объект пару, состоящую из человека и его руки, пока эта рука не отделена от человека).

6. Особый интерес представляет апория, относящаяся к гносеологическим вопросам, связанным с представлением протяженного тела (соответственно, промежутка времени) в виде множества (совокупности) непротяженных неделимых: точек (соответственно моментов времени). Поскольку лишенная всяких измерений точка (соответственно момент времени) является идеализированной математической абстракцией, на практике не уловимой (никто не имел дела в опыте с лишенной всяких измерений «точкой»), «построение» (хотя бы теоретическое) реально существующего тела из абстрактных «точек», естественно, вызывало возражения как раз у некоторых материалистически мыслящих математиков и философов. Так Н. И. Лобачевский считал необходимым положить в основу геометрии не точку, а тело и определял точку как пару тел, определенным образом соприкасающихся друг с другом [9]. Соответствующая апория Зенона может быть истолкована как вопрос о том, как из ничего можно сложить (построить) что-нибудь: ведь сколько раз ни повторять ничто, ничего и не получится? «В самом деле, если что-нибудь, будучи прибавлено <к какой-нибудь

вещи› или отнято ‹от нее›, не делает ‹эту вещь› больше, соответственно меньше тогда, по словам Зенона, оно не принадлежит к числу существующего, причем существующее, очевидно, понимается как величина и постольку — как величина телесная: ведь именно такая величина обладает бытием в полной мере; ...точка же и единица ‹нуль› ‹не создадут увеличения› ни при каких обстоятельствах»[10]. Хотя Аристотель и называет эти рассуждения Зенона грубыми, он замечает тут же, что «все-таки ‹остается вопрос›, как из одного подобного неделимого или нескольких таких получится величина?»

В современной литературе встречаются попытки[11] справиться с этими трудностями, ссылаясь на теоретико-множественную теорию меры, согласно которой несчетное множество множеств меры нуль может иметь уже и ненулевую меру, почему существование протяженных тел, очевидно, следует даже рассматривать как «доказательство» существования несчетных актуально-бесконечных множеств. Ясно, однако, что таким образом отнюдь не решаются гносеологические трудности, связанные с неконструктивностью «построения» протяженных объектов в виде актуально-бесконечных (к тому же еще и несчетных) множеств непротяженных элементов. В лучшем случае эти трудности принимаются за решенные для каких-нибудь исходных объектов, например, для отрезков вида [O, α], где $\alpha \leqslant 1$, при помощи допущения, что ко всякой точке отрезка [O, 1] мы умеем отнести действительное число, отличающее ее от всех других точек этого отрезка, хотя их и несчетное множество.

7. Наибольшей известностью пользуются апории Зенона, относящиеся к движению. Все они приведены в «Физике» Аристотеля. Гегель подробно останавливался на них в своей «Истории философии». Значение, которое им придавал Ленин, видно из его критических комментариев к ним (и к связанным с ними дискуссиям) в конспекте лекций Гегеля по истории философии[12].

Этих апорий четыре. В литературе они получили специальные имена. Первые две («Дихотомия» и «Ахиллес») относятся к трудностям, связанным с движением в предположении неограниченной делимости отрезков пути и времени. Вторые две («Стрела» и «Стадий») — к трудностям, возникающим, наоборот, в предположении существования неделимых отрезков пути и атомов времени («теперь»).

Апория, называемая «Дихотомией», доказывает, по Аристотелю, «несуществование движения» «на том основании, что перемещающееся тело должно прежде дойти до половины чем до конца» («Физика», VI, 9, 239в), почему движение не может закончиться, так как прежде чем дойти до конца, нужно будет еще пройти половину остатка, и т. д. (В «Лекциях по истории философии» Гегель излагает эту апорию, как опровергающую для движения возможность начаться, поскольку раньше чем дойти до половины пути, нужно дойти до половины этой половины, и т. д. К невозможности закончиться в таком случае будет относиться уже только апория «Ахиллес».) Эта апория чаще всего трактуется просто как свидетельствующая о том, что Зенон не располагал еще математическим понятием «предела» (не умел суммировать, например, геометрическую прогрессию $^1/_2 + ^1/_4 + ^1/_8 \ldots$) и думал — мы уже ссылались на это, — что «сумма бесконечно большого (неограниченного) числа любых, хотя бы и чрезвычайно малых, протяженных величин обязательно должна быть бесконечно большой»[13], почему и приходил к заключению, что движение-де «никогда не закончится и быстроногий Ахиллес не догонит черепаху».

Между тем аргумент Зенона можно истолковать так: представим себе, что нам нужно измерить длину некоторого отрезка *AB* и у нас есть две «единицы» измерения, первоначально неотличимые друг от друга, но такие, что если первую считать абсолютно жесткой (не меняющийся в процессе измерения), то вторая оказывается такой, которая после каждого ее откладывания на измеряемом отрезке сокращается вдвое. Пусть в результате измерения первой «единицей» отрезок *AB* оказался имеющим длину 2. Тогда ясно, что в результате измерения второй «единицей» он окажется бесконечно большим: какое бы (конечное) число раз мы ни отложили нашу сокращающуюся «единицу» измерения, нам придется откладывать ее еще раз, и процесс измерения никогда не закончится: точка *B* в этом процессе будет недостижимой — «бесконечно удаленной» точкой[14]. (Само собой разумеется, что аналогичное рассуждение применимо не только к отрезку, но и к промежутку времени.) Именно такого рода процесс «измерения» отрезка естественно приходит на ум в связи с апорией Зенона. Разница состоит в том, что в апории подчеркивается, что во всяком непрерывном движении точки по отрезку действительно осуществляется такой процесс, поскольку прежде чем пройти весь отрезок AB, нужно пройти его половину, прежде чем пройти оставшуюся половину, нужно пройти ее половину и т. д. Чтобы достигнуть точки B, нужно, следовательно, закончить бесконечный, т. е. не имеющий конца процесс, в чем и состоит диалектическая трудность — апория. Эту трудность видит и Аристотель, который пишет: «Если, взявши от конечной величины определенную часть (например, половину. — *С. Я.*), снова взять ее в той же пропорции (от остатка опять взять половину. — *С. Я.*), ...то конечную величину нельзя пройти до конца» (Физика, кн. III, 6, 206в). Но его возражения Зенону, которые обычно считаются полностью исчерпывающими вопрос[15], в действительности сводятся к тому, что Аристотель, который и в ряде других мест определенно высказывается против завершенной («актуальной») бесконечности, становится на отвергаемую им же точку зрения. Он сводит задачу, относящуюся к движению точки по отрезку, к аналогичной задаче для промежутка времени; последнюю же просто принимает за решенную.

«Ошибочно, — пишет Аристотель — рассуждение Зенона, что невозможно пройти бесконечное, т. е. коснуться бесконечного множества отдельных частей в ограниченное время. Ведь длина и время, как и вообще все непрерывное, называются бесконечными в двояком смысле: или в отношении деления или в отношении границ. И вот бесконечного в количественном отношении нельзя коснуться в ограниченное время, бесконечного согласно делению — возможно, так как само время в этом смысле бесконечно. Следовательно, приходится проходить бесконечность в бесконечное, не в ограниченное время и касаться бесконечного множества частей бесконечным, а не ограниченным множеством» («Физика, кн. VI, 2 233а).

Иными словами, поскольку для некоторой последовательности отрезков времени предел достигается, то он достигается и для соответствующей последовательности отрезков пути[16]. Нетривиальность того обстоятельства, однако, что такой предел в процессе последовательного приближения к нему актуально достигается, хорошо подчеркнул известный математик Г. Вейль, который писал: «Если бы, в соответствии с парадоксом Зенона, отрезок длины 1 можно было составить из бесконечного количества отрезков длины $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ..., взятых каждый как отдельное целое, то непонятно, почему какая-нибудь машина, способная пройти эти бесконечно многие отрезки в конечное время[17], не могла бы совершить в конечное время бесконечное множество актов решения, давая, скажем, первый результат через $^1/_2$ минуты, второй — через $^1/_4$ минуты, после этого третий — через $^1/_8$ минуты после второго и т. д. Таким образом, оказалось бы возможным, в противоречие с самой сущностью бесконечного, чисто механическим путем рассмотреть весь ряд натуральных чисел и полностью разрешить все соответствующие проблемы существования (вроде Большой теоремы Ферма и других трудных задач теории чисел. — *С. Я.*)»[18].

8. Апория «Стрела» состоит в том, что если время слагается из неделимых «теперь» и всякое тело всегда либо покоится, либо движется, то, так как в течение неделимого «теперь» тело не может двигаться (иначе «теперь» подразделилось бы на части, соответствующие различным положениям тела), то в каждом «теперь» оно должно покоиться. Поскольку же ничего, кроме «теперь», во всем промежутке времени нет, то тело вообще не может двигаться. Начиная с Аристотеля решения этой апории всегда состояли в том, что различным образом уточнялись понятия «движения» и «покоя». В частности, еще Аристотель говорил о том, что в применении к моменту времени нельзя говорить ни о движении, ни о покое. Эти понятия имеют смысл лишь в применении к промежутку времени, в течение которого тело может менять свое место — и тогда оно движется, либо же не менять его — и тогда оно покоится. Хороший и ясный обзор различных уточнений понятий движения и покоя, предложенных в целях решения трудностей, вскрытых Зеноном, содержится в уже упомянутой выше статье К. Айдукевича. Характерной чертой всех этих решений является, однако, то обстоятельство, что в целях обоснования непротиворечивости движения, в осуществимости которого никто на самом деле не сомневался[19], авторы

их пользуются допущениями об осуществимости вещей, заведомо не осуществимых: о том, что можно (с абсолютной точностью) уловить непротяженный (идеальный) момент времени; о том, что можно сопоставить с каждым идеальным моментом времени не менее идеальную, лишенную всяких измерений и поэтому нематериальную точку пути; о том, что всякую такую точку можно полностью индивидуализировать, «задав» ее действительным числом, т. е. не смущаясь тем, что при этом должно предполагаться известным все бесконечное множество десятичных цифр каждого (из некоторого несчетного множества их) действительного числа, и др. В действительности такие допущения не препятствуют научности теории только потому, что последняя содержит в себе способы ее конечного приближенного истолкования, отнюдь не при всех условиях без противоречий применимого. А как раз эти способы в решениях диалектических трудностей, связанных с отображением движения, обычно не обсуждаются.

Последняя из апорий движения — апория «Стадий» довольно трудна для изложения. Мы ограничимся здесь очень упрощенным освещением ее содержания, фактически уже использованным нами при освещении апории «Стрелы». Пусть время состоит из неделимых протяженных атомов. Представим себе на противоположных концах ристалища двух бегунов, настолько быстрых, что на пробег от одного до другого конца ристалища каждому из них требуется один только атом времени. И пусть оба одновременно выбегают с противоположных концов. Когда произойдет их встреча, неделимый атом времени разделится пополам, т. е. в атомы времени тела не могут двигаться, как это и было предположено в апории «Стрелы».

9. Более полное освещение содержания этой и других апорий Зенона, тех предположений, на которых сами они основаны (которые чаще всего состоят в экстраполяции на малые отрезки пути и времени соотношений и свойств, верных лишь для привычной нам обстановки), и в особенности более чем двух с половиной тысячелетней истории связанных с ними дискуссий требует обращения к литературе по истории философии и философским основаниям математики, не говоря уже о специальной литературе, посвященной парадоксам Зенона.

Из последних работ в этой области, содержащих ряд новых идей, следует отметить седьмую лекцию И. Г. Башмаковой по истории математики в Древней Греции[20].

На всех этих вопросах, однако, я позволю себе здесь не останавливаться. Мне хотелось бы только — в качестве иллюстрации к тому ответу на поставленный в заголовке статьи вопрос, который мне представляется непосредственно следующим из принципов материалистической диалектики, — осветить более подробно одну из самых новых попыток справиться с апориями Зенона, относящимися к теории движения. Речь идет о статье японского логика С. Шираиши[21]. В этой статье делается попытка построить теорию движения, не прибегая к средствам математического анализа, т. е. не пользуясь такими понятиями, как понятия предела, действительного числа, множества и др. Мне представляется также, что построенная автором теория движения действительно непротиворечива и что непротиворечивость ее нетрудно доказать. И тем не менее и эта теория основана на допущениях — в применении к отображаемому в ней движению, — равносильных тому, что неопределенная, расплывчатая, «нежесткая» движущаяся точка представляется определенной, «жесткой», «омертвленной», остановленной.

10[22]. К сожалению, с работой Шираиши автор знаком только по реферату Прайора[23].

Как замечает референт, «автор формулирует и припринимает аргументы Зенона против канторовой непрерывности движения, с одной стороны[24], и против просто дискретного движения, с другой[25], и предлагает аксиомы для некоторой «неопределенной непрерывности» пространства, времени и движения, не оставляющие, с его точки зрения, места для возражений. Независимо от того, является ли эта претензия оправданной или нет, аксиомы его интересны и явного противоречия не содержат».

Непротиворечивость аксиоматики Шираиши, приводимой Прайором, нетрудно доказать. Мы это сделаем даже для некоторой последовательности систем аксиом рассматриваемого в статье Шираиши рода. В связи с предлагаемой им аксиоматикой такое расширение ее представляется вполне естественным.

Шираиши рассматривает три отношения между точками A, B: $A < B$ («A прежде B»), $A > B$ («A после B»)

и $A \backsim B$ («A неотличима от B»), для которых вводит следующие аксиомы.

Аксиома 1. Между любыми двумя точками A, B имеет место одно, и только одно, из соотношений: $A < B$, $A > B$, $A \backsim B$.

(Уже в связи с этой аксиомой встает вопрос о том, разрешается ли говорить когда-нибудь о двух разных точках A, B как о неотличимых друг от друга. На этом вопросе, — в связи с которым и представляется естественным предлагаемое нами расширение системы аксиом Шираишви, — мы остановимся ниже).

Аксиома 2. $A < B$ равнозначно тому, что $B > A$.

Аксиомы 3 и 4 говорят о том, что отношения «$<$» и «$>$» транзитивны.

Аксиома 5. $A \backsim A$.

Аксиома 6. Если $A \backsim B$, то $B \backsim A$. (Аксиомы 5 и 6 констатируют, иначе говоря, что отношение «неотличимости» рефлексивно и симметрично).

Аксиома 7. Существуют точки A, B, C, такие, что $A \backsim B$, $B \backsim C$, но не $A \backsim C$. (Иными словами, отношение $A \backsim B$ не транзитивно: точка A может быть неотличима от точки B, точка B неотличима от точки C, точка же A отличима от точки C).

Аксиома 8. Если $A < C$, $A \backsim B$, $B \backsim C$ $(A \backsim B \backsim C)$, то существует точка D такая, которая неотличима от A, но уже отличима от B, и притом так, что $D < B$.

$A < B$ Аксиома 9. Если $A \backsim B$, то между A и B можно вставить «самую короткую цепочку» (наименьшее число) неотличимых последовательно друг от друга точек, соединяющих A с B. (Иначе говоря, среди цепочек вида $A \backsim C_1 \backsim C_2 \backsim C_3 \ldots \backsim C_k \backsim B$ есть такая, у которой индекс k наименьший).

Аксиома 10. То же для $A > B$.

Аксиома 11. Если $A \backsim C \backsim B$, то между A и B не существует точки D, такой, что $A < D < B$.

Аксиома 12. Аналогична предыдущей, но с заменой «$<$» на «$>$». (Аксиомы 11 и 12 говорят, таким образом, о том, что между двумя точками A, B такими, что их можно соединить цепочкой последовательно неотличимых точек, содержащей только одну точку C, нельзя вставить точку, отличимую от обеих точек A и B).

Нетранзитивность отношения «неотличимости» можно истолковать, казалось бы, как ведущую к противоречию.

Например, пусть $A \backsim B \backsim C$, но $A < C$. Здесь точка B характеризуется тем, что она неотличима от C, между тем как A отличима от C (больше того, мы знаем даже, что $A < C$). A и B, таким образом, обладают разными свойствами, при помощи которых мы и можем отличать их друг от друга, между тем как, по условию, A неотличима от B. Поскольку к тому же $A < C$, между тем как $B \backsim C$, мы заведомо можем сказать, что A не после B: иначе мы имели бы $B \backsim B \backsim C$[26] и $B < A < C$, что противоречит аксиоме 11. Но если A отличима от B и не после B, то, в силу аксиомы 1, A должна быть прежде B. A, которая неотличима от B, таким образом, оказалась в действительности отличимой от B, и притом так, что $A < B$.

Такое возражение предвидит и Шираиши, который, однако, справляется с ним, замечая, что из этого рассуждения следует только необходимость различать разные «отличимости». Поскольку, соответственно, приходится различать и разные «неотличимости», естественно расширить аксиоматику Шираиши, введя в нее «неотличимости» разных порядков: неотличимость$_1$, неотличимость$_2$..., неотличимость$_n$... Иными словами, сделав допущение, что, например, точки, неотличимые простым глазом, могут оказаться отличимыми при помощи лупы, неотличимые при помощи одной лупы могут оказаться отличимыми при помощи более сильной лупы, и т. д. Конечно, это очень сильное допущение, но, как мы видели, вполне естественное, и даже, в известной мере, необходимое, поскольку без «разных» неотличимостей мы просто не можем обойтись. (Отыскание наименьшей цепочки точек C_1, C_2, ..., C_k такой, что $A \backsim C_1 \backsim C_2 \backsim \ldots \ldots \backsim C_k \backsim B$, заведомо требует умения различать случаи $X \backsim X$ и $X \backsim Y$, где Y в каком-то смысле отлично от X).

Между тем для этой, расширенной даже, теории нетрудно доказать непротиворечивость.

Действительно, истолкуем точки A, B, C, D... как рациональные числа, для которых отношения «$\backsim_n$», «$<_n$» и «$>_n$» введены при помощи следующих определений:

$$A \backsim_n B \rightleftharpoons |A - B| \leqslant 1/2^n,$$

$$A <_n B \rightleftharpoons B - A > 1/2^n,$$

$$A >_n B \rightleftharpoons A - B > 1/2^n.$$

Перепишем нашу систему аксиом, заменив в ней всюду $\backsim$, $<$, $>$ на $\backsim_n$, $<_n$, $>_n$ соответственно. Тогда нетрудно убедиться в том, что в этом истолковании все аксиомы (для каждого n) превращаются в истинные предложения арифметики рациональных чисел, а так как последняя непротиворечива, то непротиворечивость всей — даже таким образом расширенной — системы будет доказана.

Проверим те из наших аксиом, которые в этом истолковании не представляются сразу очевидными. Начнем с аксиомы 1. Впрочем, она достаточно очевидна, поскольку для любых двух рациональных чисел A и B абсолютная величина их разности либо $\leqslant {}^1/_{2^n}$, либо $> {}^1/_{2^n}$; в последнем же случае либо $B - A > {}^1/_{2^n}$, либо $A - B >$ $> {}^1/_{2^n}$.

Проверка истинности (в нашем истолковании) аксиом 2—6 вряд ли может вызвать затруднения.

Чтобы проверить правильность аксиомы 7, достаточно взять, например, числа A, B, C, такие, что $B = A + {}^1/_{2^{n+1}}$, $C = B + {}^1/_{2^n}$.

При условиях, о которых идет речь в аксиоме 8, за точку D, удовлетворяющую ее требованиям, достаточно взять $A - {}^1/_{2^n}$. (Действительно, $|(A - {}^1/_{2^n}) - A| \leqslant {}^1/_{2^n}$, т. е. точка $(A - {}^1/_{2^n})$ неотличима$_n$ от точки A. В то же время, поскольку B неотличима$_n$ от C, мы должны иметь $B \geqslant C - {}^1/_{2^n}$, откуда, так как по условию $C > A + {}^1/_{2^n}$, получаем далее $B > A$ и, значит, $B - (A - {}^1/_{2^n}) > {}^1/_{2^n}$, т. е. $(A - {}^1/_{2^n}) <_n B$, что и требовалось доказать).

Чтобы получить «самую короткую цепочку», о которой идет речь в аксиоме 9, достаточно заметить, что если k есть целая часть числа $(B - A) \cdot 2^n$, то между A и B заведомо нельзя вставить меньше чем k последовательно неотличимых$_n$ друг от друга чисел C_1, C_2, ..., C_k. $\Big($В аксиоме 10 вместо числа $\left[\frac{B-A}{{}^1/_{2^n}}\right]$ нужно только рассмотреть число $\left[\frac{A-B}{{}^1/_{2^n}}\right]\Big)$.

Чтобы проверить аксиому 11, достаточно заметить, что если $A <_n D <_n B$, то $|B - A| > {}^2/_{2^n}$, между тем как по условию $A \backsim_n C \backsim_n B$, т. е. $|C - A| \leqslant {}^1/_{2^n}$ и $|B - C| \leqslant$ $\leqslant {}^1/_{2^n}$, откуда $|B - A| \leqslant {}^2/_{2^n}$.

Аналогично проверяется аксиома 12.

Непротиворечивость системы аксиом Шираиши, таким образом, можно считать установленной. Однако и эта система аксиом основана на очень сильном и отнюдь не просто (без усилий с нашей стороны) осуществимом допущении, что мы умеем различать (индивидуализировать) неразличимые в ходе движения точки, что мы, иными словами, располагаем инструментом, позволяющим нам делать «жесткими» (неизменяющимися и распознаваемыми как таковые) «нежесткие» (расплывчатые, текучие) объекты, умеем находить по одним из таких объектов другие и высказывать о них однозначно определенные высказывания, такие, на вопрос об истинности или ложности которых возможен один и только один ответ: да или нет [27].

Чтобы отобразить движение и при помощи такой теории, как эта, нам, следовательно, необходимо позаботиться о том, чтобы рассматриваемыми нами движущимися объектами мы могли оперировать как равными самим себе, не изменяющимися пока мы разговариваем о них (остановленными) предметами. В этой необходимости «остановить» движение, чтобы отобразить его в логике понятий, и состоит, как мне представляется то — диалектическое — противоречие движения, о котором В. И. Ленин говорит именно в связи с апориями Зенона.

11. Подводя итог, остановимся, хотя бы в самых общих чертах, на вопросе о том, как диалектический материализм решает трудности, к которым относятся апории Зенона о движении.

Именно в связи с этими апориями Ленин в своих «Философских тетрадях» замечает, что задача отобразить движение в понятиях содержит диалектическое противоречие, поскольку нельзя отобразить движение, каким-нибудь образом не остановив (не «омертвив») его, т. е. не обращаясь к его противоположности — к покою.

«Мы не можем представить, выразить, смерить изобразить движение, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого,» — пишет Ленин. «Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия.

И в этом суть диалектики. *Эту-то суть* и выражает формула: единство, тождество противоположностей» («Философские тетради», 1947, стр. 243).

Самый обычный прием отображения движения, которым широко пользуется так называемая классическая механика, состоит в указании способа, позволяющего относить к любому моменту времени (из некоторого промежутка времени) координаты, определяющие место движущейся точки. Этот прием не ведет, однако, к формально логическому противоречию только благодаря тому, что мы, так сказать, перемещаем одну сторону противоречия за пределы нашей теории, оставляем в ней только нужным образом идеализированные («огрубленные») допущения и полностью отвлекаемся от несоответствия их действительному положению вещей. Так, с одной стороны, мы утверждаем, что нет таких (сколь угодно малых) промежутков времени, которые нельзя было бы подразделить на еще более малые (но тем не менее также протяженные) промежутки времени, в течение которых тело, о движении которого идет речь, не меняло бы места; с другой же стороны, мы разрешаем себе считать «достаточно малые» протяженные промежутки времени непротяженными «моментами», т. е. позволяем себе отвлечься (абстрагироваться) от происходящего в течение этих промежутков времени изменения места тела (от его движения). Правда, обычно добавляют, что, действуя так, мы допускаем ошибку, почему и получаем только приближенные значения интересующих нас (измеряемых) величин (длины пути, времени движения, его скорости или ускорения, и т. п.). Однако самые эти величины (в отличие от их «приближенных» значений) обычно рассматривают при этом как реально существующие идеально точные объекты, не смущаясь тем, что такое «существование» основано на допущениях, которые мы заведомо не считаем осуществимыми: никто ведь не сомневается в том, что нельзя уловить непротяженный «момент» времени или построить лишенную каких бы то ни было размеров точку!

В действительности суть дела состоит в том, что «идеально точные» величины являются лишь огрубленным, упрощенным приближением к тому, что нам нужно при их помощи отобразить, — хорошим приближением, поскольку мы таким образом отвлекаемся от расплывчатости границ исследуемых объектов или явлений и выделяем жесткое существо дела: его центральное, огрубленное и остановленное («омертвленное») ядро. За счет этого «омертвления» получаются уже однозначные ответы на интересующие нас вопросы: формально логического противоречия не возникает, во всяком случае непосредственно. К последнему мы приходим, однако, как только выясняется, что огрубление, на котором была основана наша идеализация, не в состоянии дать нам полной картины исследуемого явления: как только существенными оказываются именно те его стороны, от которых мы отвлеклись, огрубив его. Но и это противоречие снова разрешается посредством некоторой идеализации, строящейся уже, однако, не на пустом месте, а на основе всего знания, добытого ранее (в том числе и при помощи тех идеализаций, неправомерность которых в применении к новым условиям была обнаружена). В разрешении этих вновь и вновь возникающих противоречий, связанных с отображением движения (а следовательно, и с самой его сущностью), и состоит развитие науки, которое само есть процесс и носит, следовательно, тот же, диалектический, характер.

Возвращаясь к классической механике, необходимо отметить еще, что возражение противников диалектики, которые утверждают будто движение есть нахождение тела в данный момент в данном месте, в другой момент — в другом месте, обходит самое существо дела, в том числе вопрос о правомерности тех допущений о «точках» и «моментах», на которых оно основано. Между тем явная оценка правомерности идеализирующих предположений, позволяющих, с одной стороны, отрицать реальное существование непротяженных «точек» и «моментов», а с другой — отождествлять те или иные реальные, происходящие во времени, события с «моментами», те или иные материальные тела (вроде планет и солнца в космографии) с «точками», выяснение границ этой правомерности (границ, различных в разных условиях) приобретают особое значение в связи с развитием современных (особенно ядерных) физики и техники. Приходится, таким образом, на неизмеримо более высоком уровне развития науки возвращаться снова к проблематике, связанной с апориями Зенона.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] P. Lévy. A propos du paradoxe et de la logique. Rév. Métaphys. Morale, 1957, № 2, p. 130.

[2] A. A. Fraenkel a. Y. Bár-Hillel. Foundations of Set Theory. Amsterdam, 1958, p. 260. Под «французским» и «гер-

манским» центрами теории функций тут имеются в виду парижская (Борель, Лебег и др.) и геттингенская (Гильберт и его ученики) школы математиков первой четверти XX в.

3 См.: С. Я. Лурье. Теория бесконечно малых у древних атомистов. М.—Л., 1935, стр. 45.

4 Дильс. Досократики, фрагм. B3. (Diels—Kranz. Die Fragmente der Vorsokratiker, 6 Aufl., Berlin, 1951—1952. Цит. по кн.: O. Becker. Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg—München, 1954, S. 43).

5 Библиографические данные об этих статьях см. в примеч. 15, 11, 21.

6 См.: С. Я. Лурье. Указ. соч., стр. 31.

7 Г. Дильс. Досократики, фрагм. B3 (Симпликий. Физика, 140, 29—33. Цит. по кн.: M. Bochenski. Formale Logik, Freiburg—München, 1956, S. 35—36, 522).

8 «Если же оно <существующее> есть, то с необходимостью каждая <его> часть должна иметь некоторую величину и толщину и расстояние одна от другой. А для части, предшествующей этой части, т. е. для части этой части, верно то же утверждение. Именно, и она будет иметь величину, и другая <часть> будет ей предшествовать. То же утверждение верно всякий раз». Эти слова Зенона приводит Симпликий. Г. Дильс. Досократики, фрагм. B. Цит. по кн.: O. Becker. Grundlagen der Mathematik..., S. 42).

9 В некотором смысле абстракция «тело» действительно более низкого уровня, чем абстракция «точка», поскольку можно показать (конкретное) тело, но нельзя показать непротяженную точку.

10 Аристотель. Метафизика. М.—Л. 1934, стр. 54.

11 См., например: A. Grünbaum. A consistent conception of the extended lincar continuum as an aggregate of unextended elements. Philosophy of Sciences, 1952, № 19, p. 288—306; A. Grünbaum. Modern Science and refutation of the paradoxes of Zeno. Scientific Monthly, 1955, vol. 81, p. 234—239.

12 В. И. Ленин. Философские тетради. М., 1947, стр. 238—239.

13 Комментарий Симпликия к «Физике» Аристотеля (С. Я. Лурье. Теория бесконечно малых..., стр. 31).

14 Хотя в первом процессе она будет достижима в два шага.

15 См., например: K. Ajdukiewicz. Über Fragen der Logik. Deutsche Zs. Philos., 1956, № 3, S. 322—323; B. Russell. Our knowledge of the external World. 1914. Цит. по пер.: B. Russell. Unser Wissen von der Aussenwelt. Leipzig, 1926, S. 230—232.

16 Правда, в другом месте («Физика», VIII, 263*а* 4—*в*—9) Аристотель замечает: «Но такое резрешение достаточно для ответа тому, кто так поставил вопрос (спрашивалось ведь, можно ли в ограниченное время пройти или сосчитать бесконечно многое), а для сути дела и для истины недостаточно... в непрерывном заключается бесконечное число половин, но только не актуально, а потенциально». Однако «потенциально» здесь понимается Аристотелем не в смысле неограниченной продолжаемости, а в смысле абстрактной мыслимости (в отличие от акту-

альной выполнимости): «Ведь нет ничего невозможного даже и в том, чтобы оно ‹тело› было разделено бесконечное число раз, хотя, пожалуй, оно не могло бы быть разделено вследствие ограниченности сил производящего деление человека» (Аристотель. «О рождении и гибели», 12, 316а; последняя фраза в версии Филопона). Цит. по кн.: А. О. Маковельский. Древнегреческие атомисты. Баку, 1946, стр. 246).

[17] Как это должно следовать из сделанного допущения. — *С. Я.*

[18] Г. Вейль. О философии математики. Л.—М., 1934, стр. 25.

[19] В ленинском конспекте «Лекций Гегеля по истории философии» мы читаем: «Зенон и не думал отрицать движение как «чувственную достоверность», вопрос стоял лишь «об его (движения) истинности» — об истинности движения. И на следующей стр., рассказывая об анекдоте, как Диоген (циник из Синопа) опровергал движение ходьбой, Гегель пишет: ... «Но анекдот продолжают еще и так: когда ученик был удовлетворен этим опровержением, Диоген стал его бить палкой на том основании, что, так как учитель спорил с основаниями, то он и возражения ему должен был представить также основательные. Поэтому не следует удовлетворяться чувственной достоверностью, а необходимо понимать». И Ленин по этому поводу замечает: «Недурно!» (В. И. Ленин. Философские тетради. М., 1947, стр. 240).

Вероятно, было бы невежливо ответить на манер Диогена на возражения Зенону Поля Леви: время-то не остановит свой ход из-за того, что философ начнет строить его теорию, но теория, в том числе даже теория сходящихся рядов, может оказаться несовершенной.

[20] См. «Историко-математические исследования», вып. IX. М., 1958, стр. 324—333.

[21] См.: S. Shiraishi. The structure of the continuity of psychological experiences and the phisical world. The science of thought, Tokyo, 1954, № 1, p. 12—24.

[22] Читатель, не интересующийся деталями теории Ширайши, этот пункт может полностью или частично опустить.

[23] См. ст. A. N. Prior, Symbolic Logic, 1955, vol. 20, p. 169—170.

[24] Здесь имеются в виду, очевидно, апории «Дихотомия» и «Ахиллес». — *С. Я.*

[25] А здесь — «Стрела» и «Стадий». — *С. Я.*

[26] Тут мы воспользовались аксиомой 5.

[27] Вместе с тем стоит, вероятно, заметить, что наличие у системы аксиом арифметической интерпретации, отнюдь не связанной непременно с каким-нибудь движением, можно рассматривать как свидетельствующее о том, что этой аксиоматикой заведомо не выявлена еще сущность движения как такового, как движения, а не как некоторых отношений, определенных для рациональных чисел. В этой связи мне представляется естественным предполагать, что теория движения вообще не может быть конечно-аксиоматизируемой теорией и что аксиоматические способы построения теории здесь не по существу.

Ю. А. Гастев

О ПОСТРОЕНИИ АНАЛИЗА НА ОСНОВЕ АКСИОМАТИЗИРОВАННОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРЯМОЙ. II

1. Общеизвестны пути формализации математического анализа на основе различных систем аксиоматической теории множеств. Представляет, однако, интерес вопрос о возможности построения анализа на основе более слабых теорий. Гильберт и Бернайс [1] наметили такое построение на основе различных модификаций теории типов второй ступени. В таких теориях употребляются связанные переменные двух типов: числовые (т. е. характеризующиеся арифметическими аксиомами) и множественные (или предикатные, формульные, функциональные).

В качестве конкретного представителя исчислений второй ступени в настоящей работе рассматривается система $Q_2^{N'}$, содержащая два типа связанных переменных: числовые и предикатные (с произвольным числом аргументных мест); в число постулатов $Q_2^{N'}$ входит принцип свертывания. В формализме L, наиболее слабом из рассматриваемых в [1], в качестве переменных 2-го типа используются формульные переменные с одним, двумя и тремя аргументными местами (могущие входить в формулы L как в свободном, так и в связанном виде), для которых постулируется правило подстановки. Система же $Q_2^{N'}$ описывается (как в [2], § 19, 73) при помощи схем аксиом с метаматематическими переменными. Известные теоремы об эквивалентности аксиоматических теорий с постулированными правилами подстановки и теорий, задаваемых схемами аксиом, доказываемые для исчисления высказываний и узкого исчисления предикатов (см., например, [2], § 30, 37; [3], § 27, 30), могут быть без особых затруднений перенесены на интересующий нас случай прикладного ([3], § 50) исчисления предикатов второй ступени. Не останавливаясь сейчас на деталях такого доказательства, будем исходить из того, что $Q_2^{N'}$ пригодна в той же мере, что и L, для формального выражения и доказательства предложений значительной части анализа, не зависящих от аксиомы выбора (Гильберт и Бернайс рассматривают и расширение системы L за счет присоединения некоторой специальной формы принципа выбора; однако в настоящей части данной работы интересный вопрос о присоединении к рассматриваемым системам принципа выбора не ставится).

2. П. С. Новиков высказал предположение о возможности построения анализа на основе исчисления первой ступени (т. е. содержащего лишь один тип связанных переменных), а именно: на основе аксиоматизированной геометрии прямой (точнее — аксиоматической теории действительных чисел (см., например, [4, 5]) с арифметикой). Мысль о возможности положить в основу анализа аксиоматическую теорию линейного континуума высказывалась и раньше [6]. Однако в [6] речь шла о содержательном построении анализа; в предложенной аксиоматике не были явно сформулированы используемые в [6] логические, арифметические и теоретико-множественные постулаты, так что вопрос о формализации понятий (или хотя бы предложений) анализа на этом уровне даже не мог быть корректно поставлен. Целью же настоящей работы является именно формальное построение анализа на базе узкого исчисления предикатов.

Предметная область рассматриваемого ниже исчисления Q_1^c («геометрии прямой») характеризуется аксиомами числового континуума. Расширения предметной области самого по себе, однако, недостаточно для выражения таких основных понятий анализа, как множества действительных чисел, числовые последовательности, функции и др., требующих для своего формального выражения использования связанных переменных по крайней мере 2-го типа. В связи с этим намечаемое ниже обоснование возможности построения анализа на основе Q_1^c заключается в указании модели $Q_2^{N'}$ в Q_1^c, в которой предложениям $Q_2^{N'}$ соответствуют предложения Q_1^c, в частности теоремам $Q_2^{N'}$ — теоремы Q_1^c. Нашей основной целью и будет построение этой модели. Поскольку в $Q_2^{N'}$ также легко строится модель для Q_1^c, эти теории оказываются взаимно относительно непротиворечивыми. Именно в таком смысле в настоящей работе употребляется термин «эквивалентность» по отношению ко всем рассматриваемым теориям. Все доказательства носят финитный характер.

3. В $Q_2^{N'}$ два алфавита переменных: 1-го типа — $\{n_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ и 2-го типа — $\{F_j^k\}$ $(j, k=1, 2, \ldots)$. Термы: переменные 1-го типа, константа 0 и выражения вида s', $s+t$, $s \cdot t$ и s^t, где s и t — термы. Элементарные формулы: равенства между термами и выражения вида $F_j^k(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, где F_j^k — переменная 2-го типа, а s_l $(l=1, \ldots, k)$ — термы. Формулы $Q_2^{N'}$ образуются из элементарных при помощи пропозициональных связок и кванторов по переменным 1-го и 2-го типов. Постулаты $Q_2^{N'}$: постулаты классического узкого исчисления предикатов с равенством ([2] § 19, 73) для переменных 1-го типа, постулаты квантификации для переменных 2-го типа, постулаты арифметики ([2], § 19) и схема аксиом свертывания

$$\exists F_j^k \forall n_{i_1} \forall n_{i_2} \ldots \forall n_{i_k} (F_j^k(n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_k}) \sim \\ \sim \mathfrak{A}(n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_k})),$$

где $\mathfrak{A}(n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_k})$ — произвольная формула $Q_2^{N'}$, не содержащая свободно F_j^k $(k=1, 2, \ldots)$ ($\mathfrak{A}$ может содержать и другие, помимо $n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_k}$, переменные; с другой стороны, некоторые из n_{i_l} — но не все — могут не входить в $\mathfrak{A}$).

4. Вспомогательный формализм Q_2^N есть подсистема $Q_2^{N'}$, содержащая лишь одноместные предикатные переменные (в прежних обозначениях — F_j^1, а короче — просто F_j). Принцип свертывания имеет в Q_2^N вид

$$\exists F_j \forall n_i (F_j(n_i) \sim \mathfrak{A}(n_i))$$

($\mathfrak{A}(n_i)$ — произвольная формула Q_2^N, не содержащая свободно F_j).

5. Во вспомогательной системе Q_2^R также два алфавита переменных: 1-го типа — $\{x_i\}$ $(i=1, 2, \ldots$; для переменных 1-го типа, удовлетворяющих предикату «быть натуральным числом», используется также алфавит n_1,

$n_2, \ldots$) и 2-го типа — $\{F_j\}$ ($j = 1, 2, \ldots$). Термы: те же, что и в Q_2^N, и константа 1. Элементарные формулы: $\mathrm{s} = \mathrm{t}$, $\mathrm{s} < \mathrm{t}$ и $F_j(\mathrm{s})$, где s и t — термы, F_j — переменная 2-го типа. Формулы образуются из элементарных, как в Q_2^N. Постулаты: постулаты классического узкого исчисления предикатов с равенством ([2], § 19, 73) для переменных 1-го типа, постулаты квантификации для переменных 2-го типа, аксиомы архимедовски расположенного поля [4, 5], принцип свертывания, формулируемый аналогично Q_2^N, и аксиома о представимости произвольного терма системы («рационального числа») в виде отношения двух целых чисел (предикаты «натуральное» и «целое» предварительно определяются при помощи принципа свертывания).

6. В Q_1^c имеются переменные одного типа: $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$; переменные, удовлетворяющие предикату «быть натуральным числом», пробегают также алфавит $\{n_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$). Термы: переменные, константы 0 и 1 и выражения $\mathrm{s} + \mathrm{t}$ и $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t}$, где s и t — термы. Элементарные формулы: $\mathrm{s} = \mathrm{t}$ и $\mathrm{s} < \mathrm{t}$, где s и t — термы. Формулы образуются из элементарных при помощи логических операторов. Постулаты: постулаты классического узкого исчисления предикатов с равенством ([2] § 19, 73), аксиомы расположенного поля [4, 5], постулаты для предиката «быть натуральным числом» и принцип Дедекинда

$$\mathrm{Sc}(F(x_i)) \supset \exists x_i \forall x_j (x_j < x_i \sim F(x_j)),$$

$$\text{где } \mathrm{Sc}(F) \underset{Df}{\sim} \exists x_i F(x_i) \& \exists x_i \neg F(x_i)$$

$$\& \forall x_i \forall x_j (F(x_i) \& x_j < x_i \supset F(x_j)) \& \forall x_i (F(x_i) \supset$$

$$\supset \exists x_j (F(x_j) \& x_i < x_j)).$$

7. В части I настоящей работы [7] была доказана эквивалентность Q_c^1 и Q_2^N. Ввиду неточности, имевшейся в доказательстве нижеследующей леммы 3, являвшейся основным результатом [7], мы вкратце воспроизведем это доказательство в исправленном виде.

8. Лемма 1. *Системы Q_2^R и Q_2^N эквивалентны* [7]. Доказательство может быть легко извлечено из известных в теоретической арифметике построений теории ра-

циональных чисел над натуральным рядом (при этом термами модели Q_2^R в Q_2^N служат гёделевы номера троек термов Q_2^N, служащих для определения понятия рационального числа в терминах Q_2^N).

9. Л е м м а 2. *Существует модель Q_1^c в Q_2^R* [7]. В Q_2^R для переменных 2-го типа определяется свойство «быть сечением в области рациональных чисел»: $\mathrm{Sc}(F_j) \underset{Df}{\sim} \exists x_i F_j(x_i) \& \exists x_i \neg F_j(x_i) \& \forall x_i \forall x_k (F_j(x_i) \& x_k < x_i \supset F_j(x_k)) \& \forall x_i (F_j(x_i) \supset \exists x_k (F_j(x_k) \& x_i < x_k))$; затем для таких F_j, что $\mathrm{Sc}(F_j)$, естественным образом определяются отношения $=$ и $<$ и арифметические операции, после чего для них, рассматриваемых в качестве термов модели, без труда проверяется выполнение всех постулатов Q_1^c.

10. Л е м м а 3. *Существует модель Q_2^N в Q_1^c* [7]. Определим в Q_1^c предикат «n-ый знак двоичного разложения действительного числа x равен 1»: $\varphi(x, n) \underset{Df}{\sim} [2^{n+1} \cdot x] - 2[2^n \cdot x] = 1$ ($[x]$ — легко определимая в Q_1^c функция «целая часть x»). Поставим в соответствие каждой элементарной формуле Q_2^N вида $F_j(s)$, где s — некоторый терм, формулу Q_1^c $\varphi(x_j, \tilde{s})$ ($\tilde{s}$ — терм Q_1^c, совпадающий по написанию с s), формуле $F_j(\mathbf{n})$ $\left(\text{с постоянным } \mathbf{n} = 0\overbrace{''\ldots'}^{n}\right)$ — формулу $\varphi(x_j, \mathbf{n})$, а элементарным формулам Q_2^N, имеющим вид равенства между термами, — совпадающие с ними по написанию формулы Q_1^c. С кванторами по переменным 1-го типа Q_2^N будут сопоставлены кванторы по переменным для натуральных чисел, с кванторами по переменным 2-го типа — кванторы по произвольным переменным Q_1^c. Формулы модели строятся из элементарных при помощи логических операторов параллельно с построением их прообразов (т. е. моделируемых ими формул) в Q_2^N. Тогда аксиомы и схемы аксиом Q_2^N переходят в доказуемые в Q_1^c формулы и схемы формул модели, причем (самый существенный пункт доказательства) принцип свертывания доказывается применением принципа Дедекинда: для произвольной формулы $\mathfrak{A}(n_i)$ из Q_2^N доказы-

вается сходимость ряда $\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\theta(l)}{2^{l+1}}$, где $\theta(n_i)$ — характеристическая функция формулы Q_1^c, соответствующей $\mathfrak{A}(n_i)$ в описанной модели; тогда такой F_j, что формуле Q_2^N $F_j(\mathrm{n})$ соответствует формула $\varphi\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\theta(l)}{2^{l+1}},\ \mathrm{n}\right)$, и есть предикат, существование которого утверждается аксиомой свертывания. Правила вывода Q_2^N переходят в выводимые правила модели: modus ponens в обеих системах формулируется одинаково, правила Бернайса для переменных 2-го типа Q_2^N переходят в правила Бернайса из Q_1^c, а правила Бернайса для переменных 1-го типа Q_2^N — в правила Бернайса для натуральных переменных Q_1^c. Как видно из сказанного, здесь, в отличие от лемм 1 и 2, модель понимается не в смысле класса термов, а в смысле класса формул: в Q_1^c мы сможем выражать (и доказывать) предложения анализа; есть основания полагать, что для выражения понятий анализа понадобится расширение Q_1^c за счет введения связанных переменных 2-го типа (соответственно расширение Q_2^N до исчисления третьей ступени).

11. Лемма 4. *Системы* $Q_2^{N'}$ и Q_2^N *эквивалентны.* Поскольку Q_2^N — подсистема $Q_2^{N'}$, достаточно построить модель $Q_2^{N'}$ в Q_2^N. Употребляя сокращения $1=0'$, $2=0''$, ..., поставим в соответствие каждой элементарной формуле $\mathrm{s}=\mathrm{t}$ из $Q_2^{N'}$ формулу $2^{\mathrm{s}+1}=2^{\mathrm{t}+1}$ из Q_2^N, а элементарной формуле $F_j^k(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \ldots, \mathrm{s}_k)$ ($\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \ldots \mathrm{s}_k$ — термы) из $Q_2^{N'}$ — формулу $F_{(p_k)^j}(2^{\mathrm{s}_1}\cdot 3^{\mathrm{s}_2}\cdot\ldots\cdot(p_k)^{\mathrm{s}_k+1})$ (p_m — m-ое простое число) из Q_2^N. Соответствие затем естественным образом продолжается параллельным образованием формул из элементарных в обеих системах, причем кванторам по n_i в $Q_2^{N'}$ соответствуют кванторы также по n_i в Q_2^N, но кванторам по F_j^k — кванторы по $F_{(p_k)^j}$. Тогда логическим и арифметическим аксиомам и схемам аксиом $Q_2^{N'}$ соответствуют доказуемые формулы и схемы формул Q_2^N. Правила вывода при переходе к модели сохраняют свой вид. Что же касается принципа свертывания из $Q_2^{N'}$, то соответствующая ему схема формул Q_2^N, имеющая вид

$$\exists F_{(p_k)^j} \forall n_{i_1} \forall n_{i_2} \ldots \forall n_{i_k} \left(F_{(p_k)^j} (2^{n_{i_1}} \cdot 3^{n_{i_2}} \cdot \ldots \cdot (p_k)^{n_{i_k}+1}) \sim \right.$$
$$\left. \sim \mathfrak{A} (2^{n_{i_1}} 3^{n_{i_2}} \cdot \ldots \cdot (p_k)^{n_{i_k}+1}) \right)$$

(для каждого $k=1, 2, \ldots$ — своя), доказывается k-кратным применением принципа свертывания из Q_2^N, причем квантор общности каждый раз берется по одной переменной, а остальные при этом играют роль параметров.

12. Т е о р е м а. *Системы* Q_1^c *и* $Q_2^{N'}$ *эквивалентны*. Доказательство немедленно следует из лемм 1—4.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. H i l b e r t, P. B e r n a y s. Grundlagen der Mathematik, Bd II, Suppl. IV. Berlin, 1939, S. 451—495.
2. С. К. К л и н и. Введение в метаматематику. ИЛ, 1957, § 19, 30, 37, 73, стр. 76—80, 127—128, 158—163, 353—359.
3. А. Ч ё р ч. Введение в математическую логику, т. I. ИЛ, 1960, § 27, 30, 50, стр. 142—145, 160—167, 284—287.
4. Д. Г и л ь б е р т. Основания геометрии, доб. VI. Гостехиздат, 1948, стр. 315—321.
5. В. В. Н е м ы ц к и й, М. И. С л у д с к а я, А. Н. Ч е р к а с о в. Курс математического анализа, т. I. Гостехиздат, 1944, гл. II, § 2, стр. 31—38.
6. А. Я. Х и н ч и н. Усп. матем. наук, т. IV, вып. 2 (30), 1949, стр. 180—197.
7. Ю. А. Г а с т е в. Уч. зап. Моск. гор. заочного пед. ин-та, серия физ.-матем., вып. 3, 1959, стр. 46—57.

Ю. А. Магинскас

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ ПРИЧИННОСТИ

Речь пойдет о работе З. Червинского «О понятии причины и канонах Милля» [1].

В работе делается попытка сформулировать миллевские каноны различия и сходства в языке, близком к языку самого Милля, но более точном, удовлетворяющем современным требованиям строгости. (Автор указывает, что желание быть близким к языку Милля вызвано в основном тем, что именно этот язык обычно употребляется в научной практике). Попутно автор анализирует различные способы строгого определения понятия причины.

Автор предполагает интуитивно ясными понятия «предмет», «свойства предмета». Среди всех свойств он выделяет класс таких, о которых имеет смысл говорить, что они принадлежат предметам в *определенное время*. Такие свойства называет «*временными*». Например, «быть больным» — временное свойство, но «быть млекопитающим» не является временным свойством. «*Явление*» определяется так, что выражение «во время t на предмете x возникло (не возникло) явление A» понимается так: «во время t некоторому предмету x принадлежит (не принадлежит) временное свойство A». (В том же смысле, в котором говорится о временных свойствах, можно говорить и о временных отношениях. Возникновение (невозникновение) явления определяется в таком случае как наличие (отсутствие) временного свойства у предмета x или временного отношения между предметами x_1, x_2, ..., x_m во время t. В работе рассматриваются только явления-свойства).

Автор подчеркивает необходимость различать явления и события. Событие, соответствующее явлению A, есть нечто, состоящее в том, что имеет место явление А (в некоторое конкретное время, на некотором конкретном предмете). Для каждого явления А существует класс событий, соответствующих явлению А.

События понимаются так, что никакое событие не повторяется. Пример: «катастрофа» — явление, «катастрофа судна Андрея Дориа в 1956 г.» — одно из событий, соответствующих этому явлению.

Анализ понятия «времени» (как оно употребляется в работе) состоит в том, что автор рассматривает некоторое счетно-бесконечное вполне упорядоченное множество S элементарных временны́х промежутков (не точек), которые условно называются «секундами» (s), а затем определяет «время» (t) как конечную непустую последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_m$ таких секунд, что для любых s_i и s_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, m-1$) секунда s_{i+1} *непосредственно следует* за секундой s_i во множестве S. Автор вводит класс времен ${}_n(t_1)$ следующим образом:

$$t_2 \in {}_n(t_1) \equiv_{Df} p_{t_2} \in t^n$$

(p_{t_2} — секунда, являющаяся началом времени t_2; t_1^n — время, являющееся продолжением времени t_1 n секунд; $t_2 \in {}_n(t_1)$ — время t_2 принадлежит классу времен ${}_n(t_1)$; $p_{t_2} \in t_1^n$ — секунда p_{t_2} принадлежит времени t_1^n). Это есть определение класса времен, начинающихся не позже, чем через n секунд после конца времени t_1.

Высказывание «явление А возникло (не возникло) на предмете x в секунду s» записывается: $A(x, s)$ (соответственно $\bar{A}(x, s)$). Высказывания «явление А возникло (не возникло) на предмете x *во времени* t» определяются так:

$$A^1(x, t) \equiv_{Df} \prod_{s \in t} A(x, s);$$

$$A^0(x, t) \equiv_{Df} \prod_{s \in t} \bar{A}(x, s).$$

После введения всех этих выражений автор переходит к определению понятия причины. Ставится задача уточнить обычное определение причины явления:

«А есть причина В — это значит, что всегда, когда возникает А, одновременно или позже возникает В».

Разбирая различные варианты уточнения этого определения, автор останавливается на одном:

$$\mathrm{A}p_n\mathrm{B} \equiv_{Df} \prod_{x} \prod_{t_1} (\mathrm{A}^1(x,\ t_1) \rightarrow \sum_{t_2 \in_n (t_1)} \mathrm{B}^1(x,\ t_2)).$$

(А есть n-причина $\mathrm{B} \equiv_{Df}$; если на любом предмете x в любом времени t_1 возникает явление А, то самое позднее через n секунд после конца времени t_1 возникает явление В). На А и В накладываются требования не быть «пустыми» и не быть «универсальными» (эти понятия можно определить как непустоту и неуниверсальность классов событий, соответствующих этим явлениям, если, конечно, предварительно мы строго определим само понятие «события»). Кроме того, требуется, чтобы никакая импликация вида $\mathrm{A}^p(x_1,\ t_1) \rightarrow \mathrm{B}^q(x_1,\ t_2)$ (где $p,\ q = 0{,}1$) не была аналитическим высказыванием. Благодаря введению некоторого временно́го параметра n, определение причины становится более гибким.

Автор дает также определение причины *события*:

$$\mathrm{A}(x_1,\ t_1)\, p_n \mathrm{B}(x_1,\ t_2) \equiv_{Df} \mathrm{A}^1(x_1,\ t_1) \cdot t_2 \in_n (t_1) \cdot \mathrm{A}p_n\mathrm{B} \cdot \mathrm{B}^1(x_1\, t_2).$$

Здесь $\mathrm{A}(x_1,\ t_1)$ и $\mathrm{B}(x_1,\ t_2)$ употребляются как функции, принимающие значения имен событий. Их необходимо отличать от логических функций $\mathrm{A}^c(x,\ t)$ и $\mathrm{B}^c(x,\ t)$ $(c = 0{,}1)$.

В четвертой части работы автор анализирует канон различия. Умозаключения по методу различия Милля рассматриваются как достоверные умозаключения, опирающиеся на некоторые общие предположения (помимо посылок)

$$(\mathrm{p}_1)\ \mathrm{A}_0^1(\xi_1,\ \tau_1) \cdot \mathrm{A}_1^1(\xi_1,\ \tau_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{A}_k^1(\xi_1,\ \tau_1) \times$$
$$\times\, \mathrm{B}^1(\xi_1,\ \tau_1') \cdot \tau_1' \in_n (\tau_1)$$

$$(\mathrm{p}_2)\ \mathrm{A}_0^0(\xi_2,\ \tau_2) \cdot \mathrm{A}_1^1(\xi_2,\ \tau_2) \cdot \ldots \mathrm{A}_k^1(\xi_2,\ \tau_2) \cdot \mathrm{B}^0(\xi_2,\ \tau_2^n),$$

описывающих экспериментальные данные; ξ с индексами — имена конкретных предметов; τ' и τ с индексами — имена конкретных времен. Эти общие предположения должны утверждать (a) некоторого рода детерминизм и (b) отсутствие влияния на явление, причину которого мы ищем, со стороны явлений, не принадлежащих некоторому классу, а следовательно, некоторого рода изолированность исследуемых явлений (эта идея нашла свое отражение в работах Г. Греневского по индуктивной логике, понимаемой как некоторая теория относительно изолированных систем).

Однако если Милль в качестве этих общих предположений брал такие, которые на принятом нами языке можно записать

$$(\mathrm{d}) \prod_{\mathrm{B}} \prod_{x} \prod_{t_2} \{\mathrm{B}^1(x,\ t_2) \to \sum_{\mathrm{Y}} \sum_{t_1} \mathrm{Y}(x,\ t_1)\, p_n \mathrm{B}(x,\ t_2)\} \text{ —}$$

(принцип всеобщего детерминизма), $(\mathrm{p}_3)\ \mathrm{Y}(\xi_1, t)\, p_n \mathrm{B}(\xi_1, \tau_1') \to$ $\to \mathrm{Y} \in \alpha_k \cdot \tau_1 \supset t$, то автор предпочитает исходить из других предположений: $(\mathrm{p}_4)\ \mathrm{Y}(\xi_1,\ t)\, p_n \mathrm{B}(\xi_1,\ \tau_1') \to \mathrm{Y} \in \alpha_k$, $(\mathrm{p}_5) \sum_{\mathrm{Y}} \sum_{t \subset \tau_1} \mathrm{Y}(\xi_1,\ t)\, p_n \mathrm{B}(\xi_1,\ \tau_1')$.

Здесь класс явлений α_k определяется следующим образом.

Класс $\mathrm{A} = \{\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_k\}$;

$\mathrm{P}_0(\mathrm{A})$-множество всех подмножеств А, кроме пустого подмножества;

$\prod(\mathrm{Z})$ — произведение всех явлений, принадлежащих множеству Z; так как явление трактуется как двухместное отношение, то вполне естественно говорить о произведениях явлений:

$$\mathrm{Y} \in \alpha_k \equiv_{Df} \sum_{\mathrm{Z} \in \mathrm{P}_0(\mathrm{A})} \mathrm{Y} = \prod(\mathrm{Z}).$$

Предположения p_4 и p_5, по мнению автора, имеют то преимущество перед p_3 и d, что p_4 и p_5 близки к гипотезам конкретных наук и могут быть хорошо обоснованы во многих случаях применения канона различия в этих науках, чего нельзя сказать про d.

В то же время интересующие нас высказывания о причинных связях

$$(\mathrm{r}_1) \quad \prod_{\mathrm{Y} \in \alpha_k - \alpha_0} \sim \mathrm{Y}(\xi_1,\ \tau_1)\, p_n \mathrm{B}(\xi_1,\ \tau_1')$$

$$(\mathrm{r}_1') \quad \prod_{\mathrm{Y} \in \alpha_k - \alpha_0} \sim \mathrm{Y} p_n \mathrm{B}$$

$$(\mathrm{r}_2) \quad \sum_{\mathrm{Y} \in \alpha_0} \mathrm{Y}(\xi_1,\ \tau_1)\, p_n \mathrm{B}(\xi_1,\ \tau_1')$$

$(r_2')\quad \sum_{Y \in \alpha_0} Y p_n B$

$(r_3)\quad Y(\xi_1, \tau_1) p_n B(\xi_1, \tau_1') \to Y \in \alpha_0$

$(r_4)\quad Y(\xi_1, \tau_1) p_n B(\xi_1, \tau_1') \to \left(Y = A_0 \vee \sum_{X \in \alpha_k} Y = X \cdot A_0\right)$

мы можем получить, опираясь на p_4 и p_5. Класс явлений α_0 определяется так:

$$Y \in \alpha_0 \equiv_{Df} \sum_{Z \in P_0(A)} (A_0 \in Z \cdot Y = \prod (Z)),$$

т. е. α_0 есть класс таких произведений явлений из класса $\{A_0, \ldots, A_k\}$, каждое из которых (произведений) содержит в качестве сомножителя явление A_0. Класс $\alpha_k - \alpha_0$ есть разность классов α_k и α_0.

Исходя из вышеизложенного, автор формулирует два правила вывода по канону различия.

(R) Из системы посылок p_1, p_2, p_3, d можно вывести следствия r_1, r_2, r_3, r_4, r_1', r_2'.

(R*) Из системы посылок p_1, p_2, p_4, p_5 можно вывести следствия r_1, r_2, r_3, r_4, r_1', r_2'.

Автор считает, что R близко к тому, что понимал под каноном различия Милль, а R* близко действительно употребляемым в естественных науках умозаключениям.

Для рассмотрения канона сходства автор вводит понятие основной причины явления:

$$A z p_n B \equiv_{Df} \prod_x \prod_{t_2} \left\{B^1(x, t_2) \to \sum_{t_1} A(x, t_1) p_n B(x, t_2)\right\},$$

т. е. явление A есть основная причина явления B, если и только если никакое событие, соответствующее явлению B, не возникает, если до этого в определенное время не было события, соответствующего явлению A.

Анализируя канон сходства, автор указывает, что для вывода из $k+1$ посылок

$(q_0)\ A_0^1(\xi_0, \tau_0) \cdot A_1^1(\xi_0, \tau_0) \cdot \ldots \cdot A_k^1(\xi_0, \tau_0) \cdot B^1(\xi_0, \tau_0') \cdot \tau_0' \in_n (\tau_0)$

$(q_1)\ A_0^1(\xi_1, \tau_1) \cdot A_1^0(\xi_1, \tau_1) \cdot \ldots \cdot A_k^1(\xi_1, \tau_1) \cdot B^1(\xi_1, \tau_1') \cdot \tau_1' \in_n (\tau_1)$

. . . .

$(q_k)\ A_0^1(\xi_k, \tau_k) \cdot A_1^1(\xi_k, \tau_k) \cdot \ldots \cdot A_k^0(\xi_k, \tau_k) \cdot B^1(\xi_k, \tau_k) \cdot \tau_k' \in_n (\tau_k)$

высказываний о причинных связях

$$(Z_1)\quad \prod_{i\in K} A_0(\xi_i,\ \tau_i)\, p_n B(\xi_i,\ \tau'_i) \quad (\text{где } K=\{1, 2, \ldots, k\})$$

$$(Z_2)\quad A_0 p_n B$$

нужны некоторые общие предположения. Такими предположениями могут послужить

$$(q_{k+1}) \prod_{i\in K} (Y(\xi_i,\ t)\, p_n B(\xi_i,\ \tau'_i) \to Y \in \alpha_k \cdot t \subset \tau_i)$$

(d_1) $\prod_{B} \sum_{A} Azp_nB$ (у любого явления есть его основная причина).

Однако недостаток этих предположений состоит в том, что d_1 представляет собой некоторое подобие философской гипотезы о всеобщей причинности (d_1, пожалуй, даже сильнее принципа всеобщего детерминизма d). Высказывания z_1 и z_2 можно получить, если вместо q_{k+1} и d_1 принять

$$(q)\quad \sum_{Y\in\alpha_k} \prod_{i\in K} \sum_{t\in\tau_i} Y(\xi_i,\ t)\, p_n B(\xi_i,\ \tau'_i).$$

Это предположение уже не страдает недостатком, присущим d_1; q может представлять собой гипотезу той или иной науки и в конкретных случаях применения канона сходства может быть достаточно хорошо обосновано данными этой науки.

После этого анализа автор формулирует два правила, соответствующих выводам по канону сходства:

(Z) Из системы посылок $q_0, \ldots, q_{k+1}$, d_1 можно получить z_1 и z_2.

(Z*) Из системы посылок q, $q_0, \ldots, q_k$ можно получить z_1 и z_2,

Однако ни $q_0, \ldots, q_{k+1}$, d_1, ни q, $q_0, \ldots, q_k$ не недостаточны для того, чтобы вывести

(z_3) $A_0 z p_n B$.

Высказывания вида z_3 часто играют важную роль в научной практике, так как утверждают, что явление B не возникает без того, чтобы раньше (в определенное время) имело место явление А. Для вывода z_3 надо к $q_0, \ldots, q_k$ добавить предположения

$$(a)\ \sum_{Y \in \alpha_k} Yzp_n B,$$

$$(a_2)\ \prod_{i \in K} \tau_i \supset \tau_i'^{-n},$$

где $\tau_i'^{-n}$ есть время, которое начинается на n секунд раньше времени τ_i' и кончается вместе со временем τ_i'.

(Z^{**}) Из системы посылок $q_0, \ldots, q_k$, a, a_2 можно получить z_3.

В заключение автор указывает, что в научной практике отыскания причинных связей используются все три понятия причины (причина явления, причина события и основная причина явления). Поэтому различение и строгое определение их немаловажно, тем более, что не всегда удается при одних и тех же предположениях вывести аналогичные следствия относительно причин событий и причин явлений (например, применяя канон различия), а следствия относительно причин явлений и основных причин явлений могут потребовать различных предположений (как это имеет место в случае канона сходства).

ЛИТЕРАТУРА

Z. Czerwiński. O pojęciu przyczyny i kanonach Milla. Studia logica, Warszawa, 1960, t. 9.

СОДЕРЖАНИЕ

Проблемы логики

Утверждено к печати
Институтом философии Академии наук СССР

Редактор издательства *Р. Ю. Розенберг*
Художник *И. В. Царевич* Технический редактор *Т. П. Поленова*.
Корректоры *А. Г. Короткова, Л. А. Розыбакиева*
РИСО АН СССР № 11-113В. Сдано в набор 8.I 1963 г.

Подписано к печати 27/III 1963 г. Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Печ. л. $4^3/_4$. Усл. печ. л. 7,79. Уч.-изд. л 7.4.
Тираж 10000 экз. Т-03388. Изд. № 1429. Тип. зак. № 16.
Цена 44 коп.

Издательство Академии наук СССР, Москва, Б-62,
Подсосенский пер., 21

1-я типография Издательства АН СССР, Ленинград,
В-34, 9-я линия, д. 12.